图书在版编目（CIP）数据

常微分方程习题解/庄万主编 .—济南：山东科学技术出版社，2003.9
ISBN 7-5331-3542-3

Ⅰ.常… Ⅱ.庄… Ⅲ.常微分方程-高等学校-习题 Ⅳ.O175.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 081899 号

前　言

常微分方程是数学专业的一门重要的基础课程。由于它在科学、技术中有着广泛的应用，理工科各专业的高等数学课程也将会有越来越多的常微分方程的内容。我们根据教学的要求编写这本题解，希望它能对数学专业、理工科开设高等数学课程各专业、参加自学考试的各相关专业的师生均有参考价值。

常微分方程是一个有近四百年发展历史的古老学科，在上一世纪后半叶，在我们国内就出版了多种比较成熟和较高水平的常微分方程教材。本题解按常微分方程课程的基本内容分成七章。为了便于读者查阅，在每一章的各节分提要、题解两个部分。在提要部分中，我们列出该节各题解涉及到的基本概念、定理、公式和求解方法。各章题解部分的习题就是从书末列出的国内外教材中选择出来的。由此看出这本题解所包含的面还是比较广的。

参加本书编写工作的是庄万教授以及山东师范大学数学系微分方程专业的教师和研究生。庄万首先安排他们从这些参考书中挑选习题及给出题解，初稿完成后，由庄万逐题审核、修改、补充并统一定稿。其中参加第一、六章工作的是吕军亮、钱守国；参加第二、三、四、五、七章工作的分别是刘庆荣、周庆华、侯婷、于欣研、伊继金。在完稿过程中钱守国还做了一些抄写与校对的工作。

本书能在较短的时间内出版,得力于山东科学技术出版社的积极支持,在此深表谢意。由于时间匆促、水平所限,书中错漏难免,恳请读者批评指正。

编 者

2003年6月于济南

目　录

第一章 绪 论

§1.1 基本概念

提 要

定义 1 含有自变量、未知函数及其导数的关系式称为微分方程. 只有一个自变量的微分方程称为常微分方程，否则称为偏微分方程.

定义 2 微分方程中所含未知函数的最高阶导数的阶数称为该方程的阶.

如

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1}$$

是 n 阶方程.

定义 3 设函数 $y=y(x)$在区间 $I=(a,b)$上有定义，且有直到 n 阶的导数，能使在该区间上成立

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称 $y=y(x)$为方程(1)的解，I 是解 $y=y(x)$的定义区间. $y=y(x)$有时由隐方程 $\varphi(x,y)=0$ 确定，把 $\varphi(x,y)=0$ 称为方程的隐式解(或也称解).

定义 4 求微分方程满足某种指定条件(通常称为定解条

件)的解的问题称为定解问题.

如，n 阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{2}$$

条件

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

称为 n 阶方程(2)的初值条件. 这里 x_0，y_0，y_0'，…，$y_0^{(n-1)}$，是给定的 $n+1$ 个常数，(2)、(3)称为初值问题或柯西(Cauchy)问题.

定义 5 形如(1)或(2)的 n 阶方程的一个包含 n 个任意常数的解的表达式

$$y=y(x,C_0,\cdots,C_{n-1})$$

称为它的通解，如果至少对于在一定范围内任意给定的初始条件(3)，都能找出任意常数 C_0，C_1，…，C_{n-1}的特定值，使对应的解满足此条件. 而方程满足初值条件的解称为特解或简称解.

题　　解

【 1 】 判断下列微分方程的阶：

1) $y'''-5xy'=e^x+1$;

2) $ty''+t^2y'-(\sin t)\sqrt{y}=t^2-t+1$;

3) $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}=y^2+1$;

4) $y^{(4)}+xy'''+x^2y''+xy'-\sin y=0$.

解 1) 三阶;

2) 二阶;

3) n 阶;

4）四阶.

【2】 判断 $y(x)=2e^{-x}+xe^{-x}$是否是方程

$$y''+2y'+y=0$$

的一个解.

解 求出 $y(x)$的一阶、二阶导数为

$$y'(x)=-2e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}=-e^{-x}-xe^{-x},$$

$$y''(x)=e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=xe^{-x}$$

将其代入微分方程得

$$y''+2y'+y=xe^{-x}+2(-e^{-x}-xe^{-x})+(2e^{-x}+xe^{-x})\equiv 0$$

其中 $x\in(-\infty,+\infty)$. 所以，$y(x)$是该方程的一个解，它的定义区间为$(-\infty,+\infty)$.

【3】 判断 $y(x)\equiv 1$ 是否为方程

$$y''+2y'+y=x$$

的一个解.

解 由 $y(x)\equiv 1$ 得 $y'(x)=0$，$y''(x)=0$. 对任意区间都有

$$y''+2y'+y=0+2\cdot 0+1=1\not\equiv x$$

所以，$y\equiv 1$ 不是该方程的解.

【4】 证明 $y=\ln x$ 在区间$(0,+\infty)$上是方程

$$xy''+y'=0$$

的一个解，而区间$(-\infty,+\infty)$不是它的定义区间.

证 当 $x\in(0,+\infty)$时，$y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$，将其代入微分方程，得

$$xy''+y'=x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\equiv 0$$

所以，$y=\ln x$ 是该方程在区间$(0,+\infty)$上的一个解.

因为负数及零的对数无意义，所以区间$(-\infty,+\infty)$不是解的定义区间.

【5】 证明 $y=\frac{1}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$内是方程

$$y'+2xy^2=0$$

的一个解，但任何包含-1或1点的区间不是它的定义区间.

证 当$x\in(-1,1)$时，$y=\frac{1}{x^2-1}$及其导数 $y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$都是具有明确定义的函数. 将这些函数代入此微分方程，得

$$y'+2xy^2=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}+2x\cdot\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2\equiv 0$$

所以，$y=\frac{1}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$内是该方程的一个解.

因为$\frac{1}{x^2-1}$当$x=\pm1$时无定义，所以包含1或-1点的任意区间都不是解的定义区间.

【6】 求初值问题

$$y'+y=0,\ y(3)=2$$

的解，已知其通解为$y=Ce^{-x}$，其中C为任意常数.

解 因为对任意C的值，$y=Ce^{-x}$均为此微分方程的解，所以我们可以利用初始条件来求C的值. 由$y(3)=Ce^{-3}=2$，得$C=2e^3$. 将C值代入通解$y(x)$,得该初值问题的解

$$y=2e^{3-x},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

【7】 求初值问题

$$y''+4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$$

的解，已知其通解为$y(x)=C_1\sin2x+C_2\cos2x$，C_1，C_2为任意常数.

解 将初始条件$y(0)=0$，$y'(0)=1$代入通解及$y(x)$关

于 x 的一阶导数

$$y' = 2C_1\cos 2x - 2C_2\sin 2x$$

得到

$$y(0) = 0 = C_2,$$

$$y'(0) = 1 = 2C_1$$

即得该初值问题的解为

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

【8】 求边值问题

$$y'' + 4y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

的解，已知其通解为 $y(x) = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$.

解 将边界条件 $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$，$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ 代入通解中，得到方程组

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1 \end{cases}$$

解此方程组，得 $C_1 = -C_2 = \sqrt{3} + 1$. 将其代入 $y(x)$得

$$y(x) = (\sqrt{3} + 1)(\sin 2x - \cos 2x)$$

即为此边值问题的解.

§1.2 导出微分方程的实例

提 要

微分方程有着深刻而生动的实际背景，它从生产实践和科

学技术中产生，而又成为现代科学技术中分析问题和解决问题的一个强有力的工具. 在实际问题中，要求描述现象规律的某些变量之间的函数关系，但往往不能直接找到这些函数关系，却容易根据现象的某些特征建立这些变量所满足的微分方程，如果这个方程可求解，就可求得描述现象规律的函数关系了.

对于一个实际问题，要建立一个较准确的描述它的状态的数学模型——微分方程及定解条件一般是比较困难的，因为它不仅涉及到多种数学概念与方法，而且还涉及到该问题所属学科的许多知识，有时甚至需要靠实验的帮助，才能建立起较能反映实际、而在数学上又有可能处理的方程来.

为叙述上的方便，下面我们人为地把实际问题粗略的分为几何问题和其他学科问题这两大类. 对于几何问题，我们建立微分方程时要熟练掌握导数、微分的几何意义，以及在分析学中熟知的用导数、微分来表达的许多其他几何概念及它们之间的关系式等；对于其他学科问题，首先要求我们掌握导数是各种意义下的瞬时变化率这一物理意义，然后把这个概念用到该问题所属学科的某种相关联的定律中去，以列出我们所要的方程来.

题　解

（一）几何问题

【9】 在 xoy 平面上求有下列性质的曲线的方程所满足的微分方程：它上面任一点 $P(x,y)$ 的切线均与过坐标原点 O 与该点 P 的直线垂直.

解 设所求的曲线方程是 $y=y(x)$. 如图，过点 $P(x,y)$ 曲线的切线的斜率为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，又 OP 的斜率为 $\frac{y}{x}$，因切线与 OP 垂

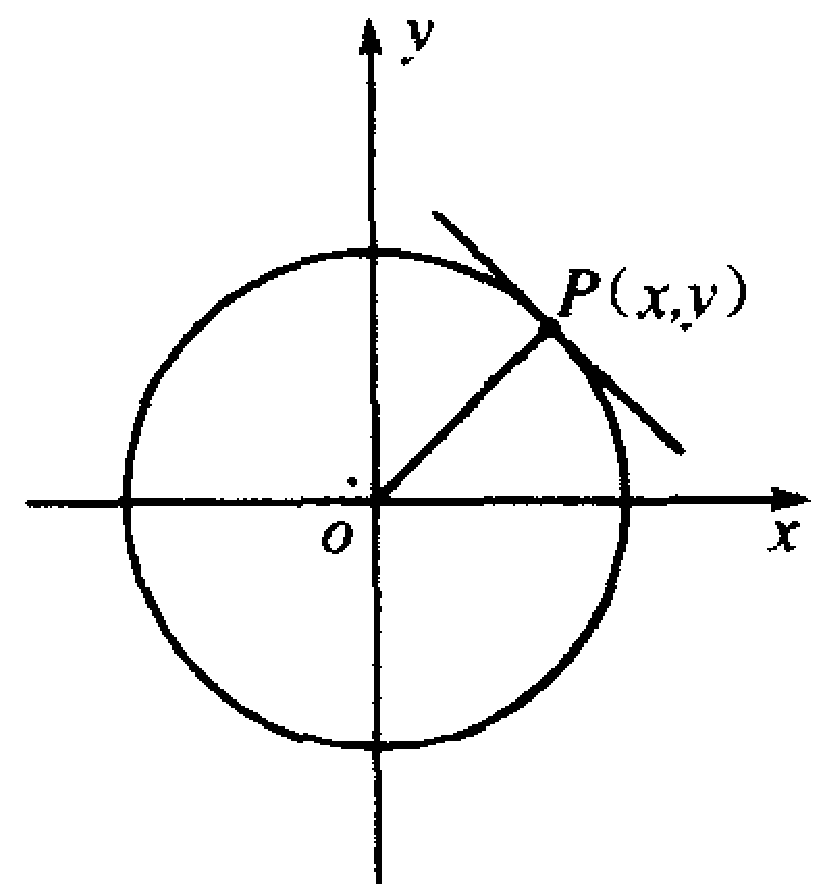
直，它们的斜率成负倒数，即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{y}{x}=-1$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$$

此即为所求的曲线方程所满足的微分方程.



(第 9 题图)

【10】 一曲线，其上每一点的切线的斜率为该点横坐标的二倍，且通过点 $P(3,4)$，求此曲线的方程所满足的微分方程及定解条件.

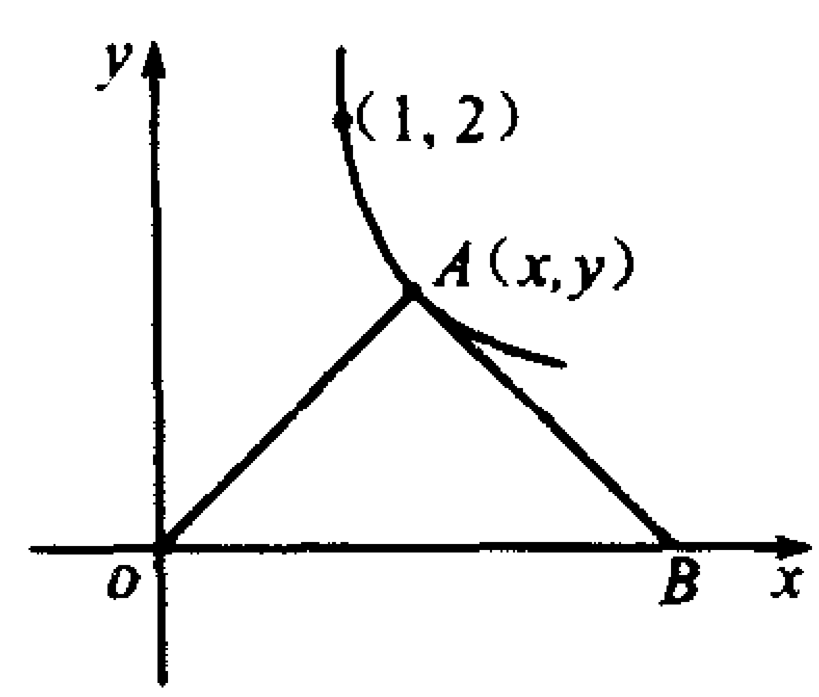
解 设曲线方程为 $y=y(x)$. 曲线在其上任一点(x,y)的切线的斜率为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，依题意可得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\\ y(3)=4\end{cases}$$

即为所求的微分方程及定解条件.

【11】 设一曲线有如下性质:曲线上各点处的切线，切点到原点的向径及 x 轴可围成一个等腰三角形(以 x 轴为底)且通过点$(1,2)$，求该曲线的方程满足的微分方程及定解条件.

解 如图. 设曲线方程为 $y=y(x)$，$A(x,y)$为所求曲线上任意一点，则过 A 点的切线方程为



(第 11 题图)

$$Y-y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(X-x)$$

所以 B 点的坐标为$\left(x-\frac{1}{y'}y,\ 0\right)$. 由题意知

$$|AO|=|AB|$$

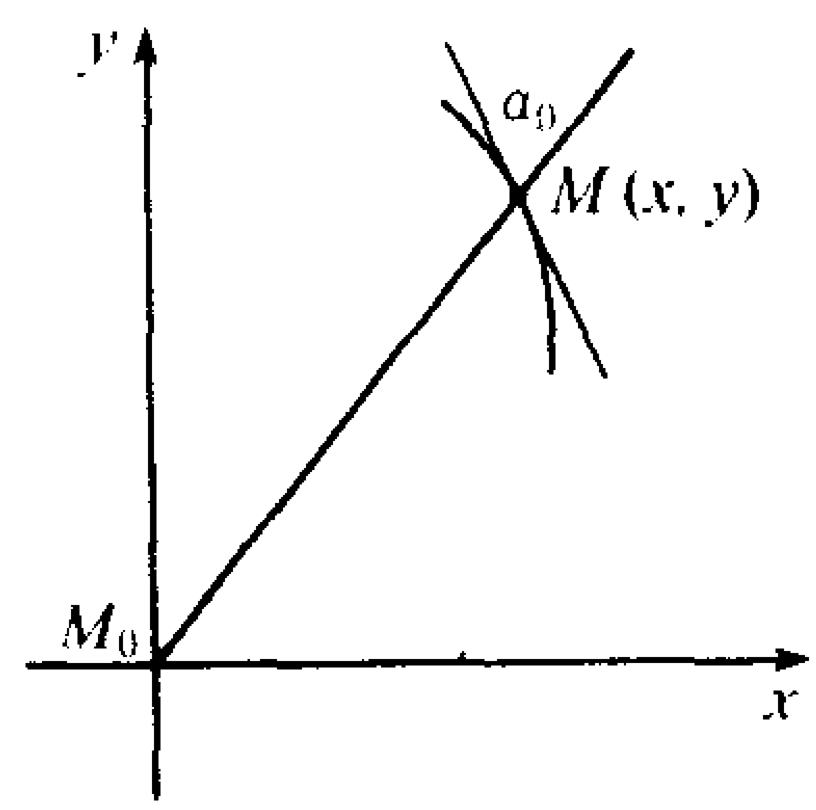
所以

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2}\\ y(1)=2\end{cases}$$

即为所求的曲线方程所满足的微分方程及定解条件.

【12】 已知一平面曲线经过某定点 M_0，且曲线上一点 M(M_0 除外)的切线与直线 M_0M 的交角恒等于定数 α_0，试求这条曲线的方程所满足的微分方程.

解 如图所示，取 M_0 为坐标原点，建立直角坐标系. 设此曲线的方程为 $y=y(x)$，则对这条曲线上任一点 $M(x,y)$，M_0M 的斜率为$\frac{y}{x}$，切线 MT 的斜率为 y'. 由切线 MT 与 M_0M 的交角为 α_0 即得



(第 12 题图)

$$\tan\alpha_0=\frac{y'-\frac{y}{x}}{1+\frac{yy'}{x}}$$

整理得

$$y'=\frac{x\tan\alpha_0+y}{x-y\tan\alpha_0}$$

此即为所求的微分方程.

【13】 求下列曲线族所满足的微分方程:

1) $y=\sin(x+C)$ (C 为参数);

2) $y=Cx+C^2$　(C 为参数);

3) $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ (a,b 为参数);

4) $y=ae^x+be^{-x}+x-1$ (a,b 为参数).

解　1) $y=\sin(x+C)$　(1)

对 x 求导得

$$y'=\cos(x+C) \tag{2}$$

取(1)、(2)的平方和得

$$(y')^2+y^2=1$$

此即为曲线族(1)所满足的微分方程.

2) $y=Cx+C^2$　(3)

$$y'=C \tag{4}$$

把(4)代入(3)得

$$y=xy'+(y')^2$$

此即为曲线族(3)所满足的微分方程.

3) $(x-a)^2+(y-b)^2=1$　(5)

两边对 x 求导得

$$2(x-a)+2(y-b)y'=0 \tag{6}$$

(6)式两边再对 x 求导得

$$2+2(y-b)y''+2(y')^2=0 \tag{7}$$

由(7)得

$$y-b=-\frac{(y')^2+1}{y''} \tag{8}$$

由(6)得

$$x-a=\frac{y'((y')^2+1)}{y''} \tag{9}$$

将(8)、(9)代入(5)得

$$\frac{(y')^2((y')^2+1)^2}{(y'')^2}+\frac{((y')^2+1)^2}{(y'')^2}=1$$

整理得

$$((y')^2+1)^2((y')^2+1)=(y'')^2$$

即有

$$(y'')^2=((y')^2+1)^3$$

此即为曲线族(5)所满足的微分方程.

4) $y=ae^x+be^{-x}+x-1$ (10)

$$y'=ae^x-be^{-x}+1 \tag{11}$$

$$y''=ae^x+be^{-x} \tag{12}$$

由(10)-(12)得

$$y-y''=x-1$$

此即为曲线族(10)所满足的微分方程.

【14】 求二次曲线族

$$\frac{x^2}{C^2}+\frac{y^2}{C^2-1}=1 \quad (C\text{ 为参数}) \tag{1}$$

的微分方程，并从微分方程本身证明这曲线族是自正交轨线族，即这曲线族中的任何两条曲线如果相交则必正交*.

解 (1)式两端对 x 求导得

$$\frac{2x}{C^2}+\frac{2yy'}{C^2-1}=0 \tag{2}$$

* [注] 设给定平面曲线族

$$F(x,y,C)=0 \tag{*}$$

依赖于一个参数 C. 如果一条曲线与曲线族(*)的各条曲线的交角为定数 α，则称它为曲线族(*)的等角轨线；如果 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，就叫做曲线族(*)的正交轨线.

从(1)、(2)中消去 C，得

$$x(x+yy')-\frac{y(x+yy')}{y'}=1$$

即

$$(xy'-y)(x+yy')=y'$$

所以，曲线族满足的微分方程为

$$(x^2-y^2-1)y'+xy(y')^2-xy=0$$

如果用 $-\frac{1}{y'}$代替上述微分方程中的y'得

$$(x^2-y^2-1)(-\frac{1}{y'})+xy\frac{1}{(y')^2}-xy=0$$

整理得

$$(x^2-y^2-1)y'+xy(y')^2-xy=0$$

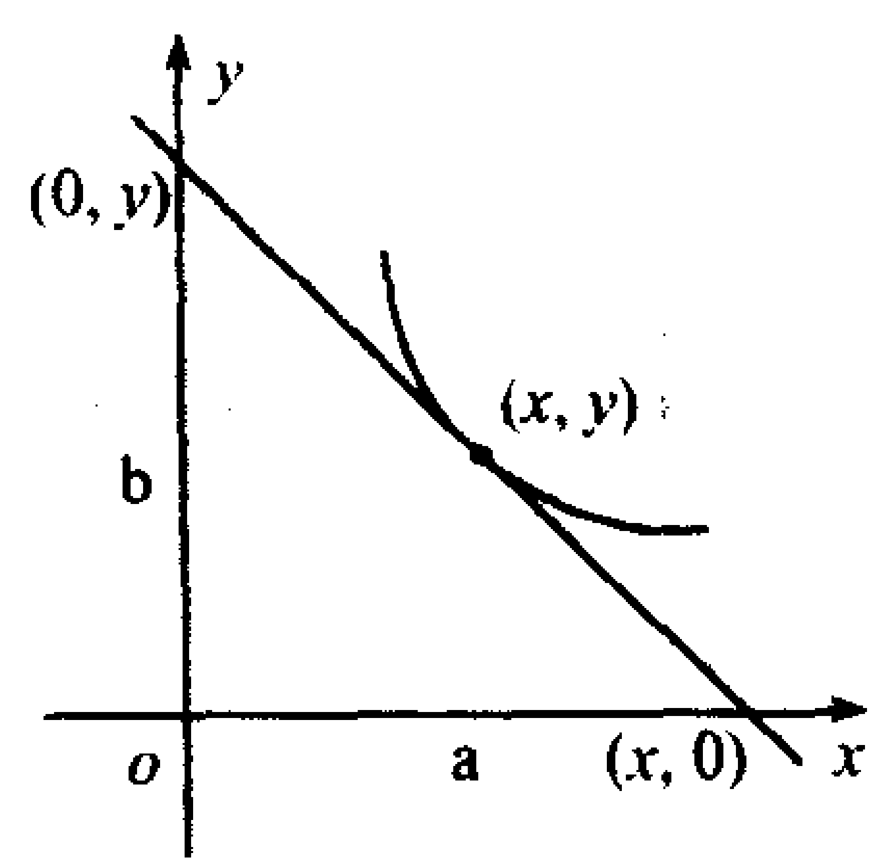
所得的微分方程与原方程一致，这说明曲线族是自正交轨线族.

【15】 设某曲线，它上面的任何一点的切线与两坐标轴所围成的三角形面积总等于2，求这条曲线所满足的微分方程.

解 如图所示，设曲线方程为 $y=y(x)$. 过曲线上任一点(x,y)的切线为

$$Y-y=y'(X-x)$$

截距 $a=\frac{xy'-y}{y'}$，$b=y-xy'$. 三角形的面积为



(第 15 题图)

$$\frac{1}{2}|a|\cdot|b|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{xy'-y}{y'}\right|\cdot|y-xy'|=2$$

整理后得到所求的微分方程为

$$x^2(y')^2-2xyy'+y^2\pm 4y'=0.$$

【16】 试求抛物线族 $y=Cx^2$ 的正交轨线族所满足的微分方程.

解 所谓相互正交的轨线族，是指一轨线族中的任一条曲线与另一轨线族的任一条曲线在交点处的切线互相垂直，那么它们的切线斜率互为负倒数，所以首先要写出抛物线族所满足的微分方程，即 $y=Cx^2$ 对 x 求导得

$$y'=2Cx$$

再由

$$\begin{cases} y=Cx^2 \\ y'=2Cx \end{cases}$$

消去 C 得

$$y'=\frac{2y}{x}$$

将 y' 换为 $-\frac{1}{y'}$，就得到与它正交的轨线族所满足的微分方程

$$y'=-\frac{x}{2y}.$$

【17】 已知曲线上任意两点 P 和 Q 之间的弧长与 P 和 Q 到一定点 O 的距离之差成正比，试求该曲线的方程所满足的微分方程.

解 以 O 点为极点建立极坐标系，在极坐标系下设曲线的方程为 $\rho=\rho(\theta)$，P、Q 两点的坐标分别为 $(\rho(\theta),\theta)$，$(\rho(\theta_1),\theta_1)$，由题意得

$$\int_{\theta_1}^{\theta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,\mathrm{d}\theta=k(\rho(\theta)-\rho(\theta_1))\quad (k\text{ 为比例常数})$$

两边对 θ 求导得

$$\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=k\rho'$$

即

$$(\rho')^2(k^2-1)=\rho^2$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\pm\frac{\rho}{\sqrt{k^2-1}}$$

为所求的方程.

【18】 在 xoy 平面上一曲线，它在点 (x,y) 的曲率等于其在点 (x,y) 的切线与横轴交角的正弦，试求该曲线的方程所满足的微分方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$. 由于在点 (x,y) 的曲率为 $\left|\dfrac{y''(x)}{\{1+[y'(x)]^2\}^{3/2}}\right|$，设曲线在点 (x,y) 的切线与横轴交角为 α，则

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

由题意得

$$\left|\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}\right|=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

即

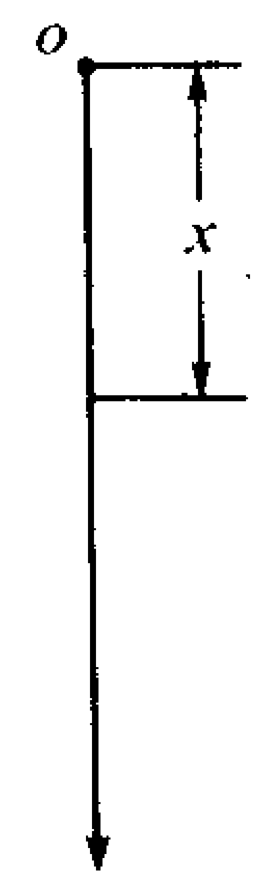
$$|y''|=y'(1+(y')^2)$$

为所求的微分方程.

（二）物理及其他问题

【19】 设质量为 m 的物体，在时刻 $t=0$ 时自由下落，在空气中受到的阻力与物体下落的速度成正比，试建立受空气阻

力的自由落体运动规律所满足的微分方程.



(第 19 题图)

解 将质量为 m 的物体视为一个质点 M, 如图建立坐标系, 设 $x(t)$ 为 t 时刻质点 M 下落的距离, 则质点下落的规律为 $x=x(t)$, 而质点 M 下落的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

加速度为

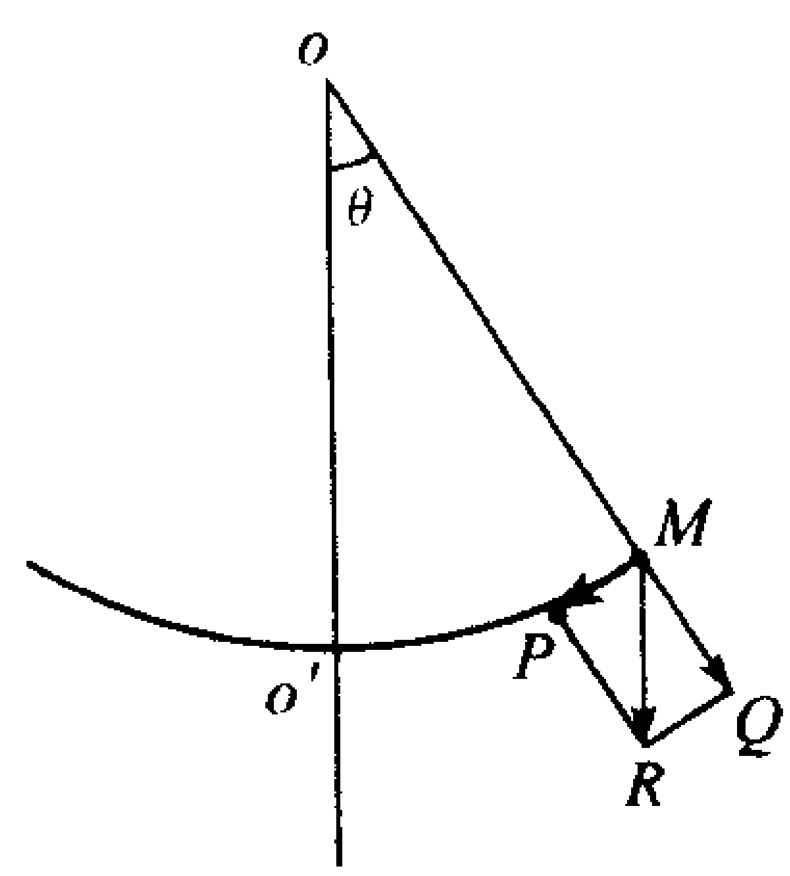
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

质点的运动规律应服从牛顿(Newton)第二定律:质点的质量乘以加速度等于所受力的总和, 即 $F=ma$, 其中 F 表示外力总和. 由于质点 M 所受力有重力 mg(g 表示重力加速度)以及空气阻力 $-k\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$(其中 k 为一正的比例常数, 负号表示阻力的方向与速度的方向相反), 于是有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+mg$$

这就是受空气阻力的自由落体运动规律所满足的微分方程.

【20】 设有质量为 m 的摆锤, 用长为 l 的细线(细线的质量忽略不计)悬挂在点 O 处, 如图所示, 让它在重力作用下于铅直平面内沿一圆弧左右摆动, 试求摆锤的运动规律所满足的微分方程.



(第 20 题图)

解 将摆锤视作质点 M, 过 O 作铅垂线 OO', 把这一方向取为零度, 摆

线在其右侧所成的角规定为正角，在其左侧所成的角规定为负角.

设摆锤在振动过程中摆线与铅垂线 OO'所成的角关于t 的函数为 $\theta=\theta(t)$，则 $\theta=\theta(t)$可以描述摆锤的运动规律. 摆锤沿圆弧运动时的切向加速度 $a=l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$，将作用在摆锤上 M 点处的重力$\overrightarrow{MR}$分解为径向力$\overrightarrow{MQ}$和切向力$\overrightarrow{MP}$. 由于在摆锤运动过程中，作用在摆锤上的力$\overrightarrow{MP}$总是使摆锤向平衡位置运动，所以$\overrightarrow{MP}$的数值为 $-mg\sin\theta$(其中 g 为重力加速度). 由牛顿第二定律有

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

即

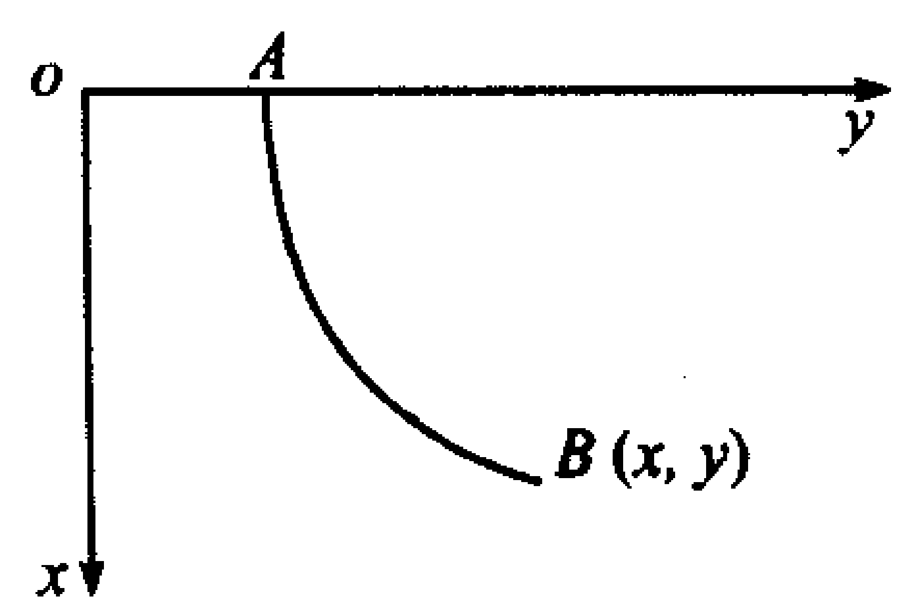
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

这就是摆锤的运动规律所满足的微分方程.

【21】 一质点在重力作用下沿某曲线无摩擦地滑动，在水平方向上成等速运动，试求这曲线的方程所满足的微分方程.

解 如图所示选取坐标系，设曲线的方程为 $y=y(x)$. 物体由 A 运动到B，根据能量守恒定律有

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=mgx$$



(第 21 题图)

即

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2gx$$

而将$\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}$代入上式得

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2gx \tag{1}$$

由已知，物体在水平方向成等速运动，即$\frac{dy}{dt}=Q$（Q 为常数），而且

$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

将其代入(1)式得

$$Q^2\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)=2gx$$

此即为所求的微分方程.

【22】 一个质量为 m 的质点在水中由静止开始下沉，设下沉时水的阻力与速度成正比，试求质点运动规律所满足的微分方程及初始条件.

解 设质点的运动规律为 $x=x(t)$，其中 t 表示时间，x 表示下沉距离. 质点在水中受到重力 mg 及水的阻力 $-k\frac{dx}{dt}$（$k>0$ 是比例常数）作用，由牛顿第二定律有

$$mg-k\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$t=0$ 时，下沉距离 $x=0$，下沉速度为 0，因而 $x=x(t)$满足下列微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=g\\ x(0)=0\\ x'(0)=0.\end{cases}$$

【23】 长为 6 米，单位长度质量为 P 的链自桌上滑下，运动开始时，链自桌上垂下部分有 1 米长，试求下滑的长度与时间 t 的关系(不计摩擦力).

解 设链下滑的运动规律为 $S=S(t)$，其中 S 为链下滑的长度，当链下滑长度为 S 时，作用在链条上的力为$(1+S)Pg$. 由牛顿第二定律得

$$(1+S)Pg=6P\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}$$

即 $S=S(t)$满足微分方程

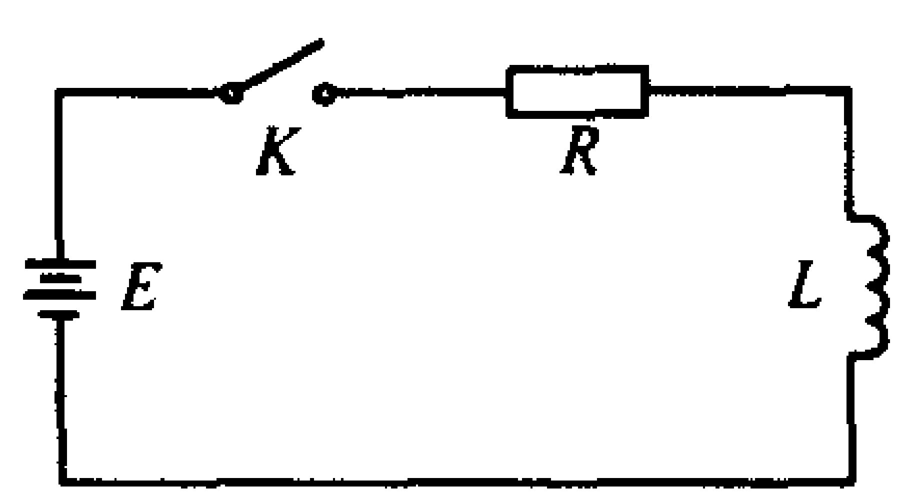
$$S''=\frac{1}{6}g(1+S)$$

易知它满足下列初始条件:

$$S(0)=1 \qquad S'(0)=0.$$

【24】 **$R-L$ 电路** 如图所示的 $R-L$ 电路，它由电感 L，电阻 R 和电源E 串联而成. 设 $t=0$ 时电路中没有电流，当开关 K 合上后，求电流 $I(t)$应满足的微分方程及初始条件，这里假定 R、L、E 都是常数.

解 为求电流 $I(t)$应满足的微分方程,我们引用关于电路的基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律:在闭合回路中，所有支路上的电压的代数和为零.



(第 24 题图)

当电流为 I 时，经过电阻 R 的电压降为RI，经过电感 L 的电压降是$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$，由基尔霍夫第二定律得

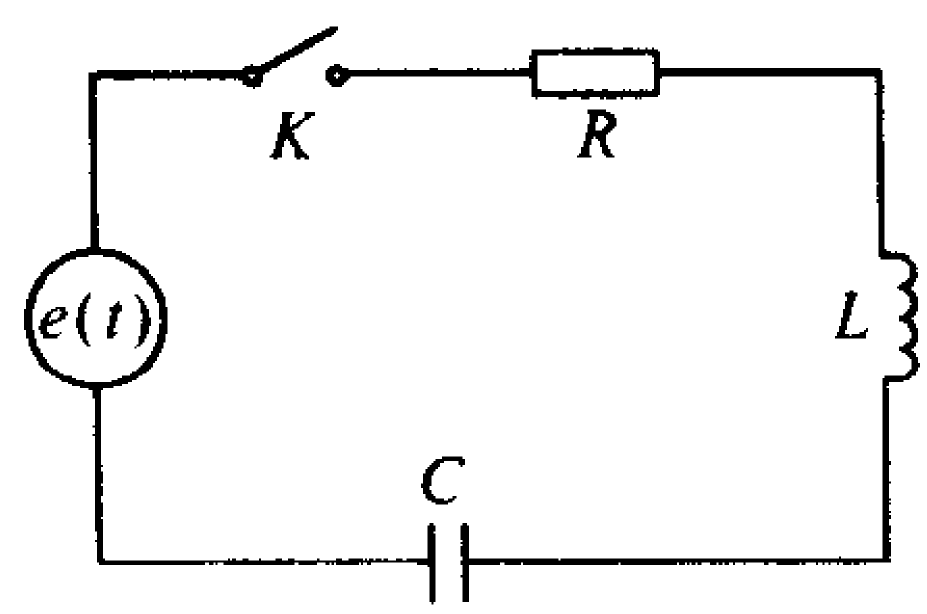
$$E=RI+L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

即 $I(t)$满足的初值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{R}{L}I+\dfrac{E}{L}\\ I(0)=0.\end{cases}$$

【25】 **R－L－C 电路** 如图所示的 $R-L-C$ 电路，它由电感 L，电阻 R 和电容 C，电源 $e(t)$串联而成，其中 R、L、C 为常数，电源 $e(t)$是 t 的已知函数. 求当开关 K 闭合后，电流 $I(t)$应满足的微分方程.

解 由于当电流为 I 时经过电阻 R、电感 L 和电容 C 的电压降分别为 RI，$L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$和$\dfrac{Q}{C}$，其中 Q 为电量. 由基尔霍夫定律得



（第 25 题图）

$$e(t)=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{Q}{C}\qquad(1)$$

因为 $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$，(1)两边求导得到

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

这就是电流 $I(t)$应满足的微分方程.

【26】 假定空气温度保持常数 u_a，将加热的物体放置于空气中，在时刻 $t=0$ 时，测量它的温度为 u_0. 试建立物体冷却过程的数学模型，即求物体的温度变化规律 $u=u(t)$所满足的微分方程及初始条件.

解 设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$表示温度的变化率，注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的，因而 $u_0>u_a$，所以温差 $u-u_a$ 恒正，又因为物体将随时间

而逐渐冷却，故温度变化率$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$恒负．因此由牛顿冷却定律：物体温度的变化率和物体与周围媒质的温度之差成比例，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-u_a) & (k>0\text{ 是比例常数})\\ u(0)=u_0\end{cases}$$

此即为物体冷却过程的数学模型．

【27】 考虑一物质 A 经化学反应，全部生成另一种物质 B，设 A 的初始质量为 10 公斤，在一小时内生成 B 物质 3 公斤，试求物质 B 的质量所满足的微分方程．

解 这是一化学问题，它遵循质量作用定律：化学反应的速度跟参与反应的物质的有效质量或浓度成正比．

设 x 表示在 t 时刻所生成 B 物质的质量，则 $M_A=10-x$ 是 t 时刻 A 物质参与反应的有效质量．按上述定律有

$$\frac{\mathrm{d}M_A}{\mathrm{d}t}=-kM_A \qquad \left(k>0,\ \frac{\mathrm{d}M_A}{\mathrm{d}t}<0,\text{ 因 } M_A\text{ 减少}\right)$$

所以得物质 B 的质量 $x(t)$ 所满足的微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k(10-x)\\ x(0)=0\\ x(1)=3\ .\end{cases}$$

【28】 一容器内盛有 200 加仑的盐水，含盐 S_0 磅，设 $t=0$ 开始以 4 加仑/分的速度向容器内注入含盐 0.5 磅/加仑的盐水，经充分搅拌后，又以同样的速度流出容器，求容器内含盐的总量与时间 t 的关系所满足的方程及初始条件．

解 此为混合溶液的问题．若以 $S(t)$ 表示 t 时刻容器内含盐的总量，则它的变化率$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$等于注入盐的速度 − 流出盐的

速度，注入盐的速度为

$$0.5(\text{磅/加仑})\times 4(\text{加仑/分})=2(\text{磅/分})$$

而流出盐的速度是

$$\frac{S(t)}{200}\times 4=\frac{S(t)}{50}\quad(\text{磅/分})$$

因此 $S=S(t)$满足下列微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2-\dfrac{S}{50}\\ S(0)=S_0.\end{cases}$$

【29】 某物体含有3千克水分，现把它放置在容积为100米^{3}的室内．假定开始时刻室内湿度为饱和湿度的25%，且在同一温度下，空气的饱和湿度为0.12千克/米^3．如果经过一天后该物体失掉所含水分的一半，求该物体在时刻 t 的含水量所满足的微分方程及定解条件．

解 我们知道疏松物体中所含水分挥发到周围空气中去的速度，与该物体的含水量成正比，与空气的饱和湿度和周围空气湿度之差成正比．

令 $W(t)$表该物体在 t 时刻的含水量(单位：千克)，则$\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$是在$t$ 时刻的挥发速度．第一个正比关系很明确，要写出第二个正比关系，就要找出 t 时刻时室内空气的饱和湿度与周围空气的湿度之差的表达式．

题设空气的饱和湿度是0.12千克/米^3，开始时室内湿度是它的25%，即为0.03千克/米^3．因此，t 时刻时空气饱和湿度与周围空气的湿度差为

$$0.12-\left(\frac{3-W(t)}{100}+0.03\right)=0.06+\frac{W}{100}=\frac{1}{100}(W+6)$$

我们把两个正比关系用一个式子表出就得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-kW(W+6)\quad (k>0 \text{ 为比例常数})$$

及边值条件

$$W(0)=3,\qquad W(1)=1.5.$$

§1.3 线素场——微分方程的几何意义

提 要

定义 1 一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\tag{1}$$

的解 $y=\varphi(x)$ 在 xoy 平面上的图象为一条曲线，称它为方程(1)的积分曲线，而方程(1)的通解 $y=\varphi(x,C)$ 对应于 xoy 平面上的一族曲线，称这族曲线为(1)的积分曲线族. 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解就是通过点(x_0,y_0)的一条积分曲线.

方程(1)的积分曲线上的每一点(x,y)的切线斜率$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$正好等于$f(x,y)$在这点的值；反之，如果一条曲线上的每一点的切线斜率等于 $f(x,y)$在这点的值，则这一条曲线就是(1)的积分曲线.

定义 2 设(1)的右端函数 $f(x,y)$在区域 D 内有定义，在 D 内任一点(x,y)处画上一个“小线段”，它以点(x,y)为中心，斜率等于 $f(x,y)$在该点的值，称之为在点(x,y)的线素，把带有这种“小线段”的区域 D 称为方程(1)的线素场(或方向场).

定理 一条曲线是方程(1)的积分曲线当且仅当在这条曲

线上每一点的切线方向与(1)的线素场在该点的线素方向一致.

由此可由线素场出发近似地画出方程(1)的积分曲线. 从几何的角度看, 变量 x 和 y 是完全平等的, 但上述提法有以下不够自然的情形: i) 由(1)确定的线素场排除点 (x,y) 的斜率不存在的情况; ii) 只考虑了 x 的单值函数图象.

定义 3(广义线素场) 除考虑方程(1)外, 同时考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f(x,y)} \tag{1$'$}$$

在区域 D 内, 由方程(1)及(1)$'$所确定的线素场称为(1)的广义线素场, 适合广义线素场的积分曲线也称为(1)的积分曲线.

如果对于平面某区域内, 函数 $f(x,y)$ 和 $\frac{1}{f(x,y)}$ 都有定义, 则称方程(1)和(1)$'$是等价的, 即他们有共同的积分曲线.

如果在某些点处, 方程(1)和(1)$'$中有一个无意义, 那么在这些点处, 可用另一个来代替, 这样, 不但把问题推广了一些, 而且讨论也方便的多.

如果在某些点处, 方程(1)和(1)$'$两者都无意义, 那么这些点称为方程(1)或(1)$'$的奇点. 一般地, 如果 $f(x,y)=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$, 若存在点 (x_0,y_0), 使 $X(x_0,y_0)=Y(x_0,y_0)=0$, 则点 (x_0,y_0) 称为方程(1)或(1)$'$的奇点.

题 解

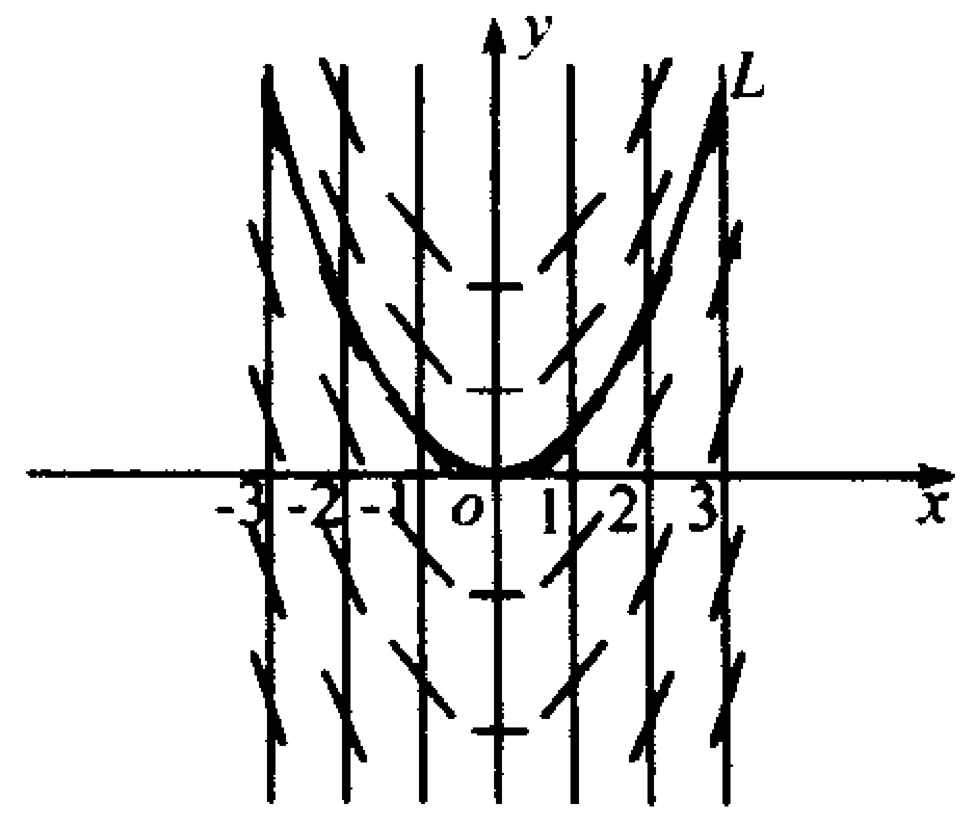
【30】 画出方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$$

的线素场, 并近似画出方程过点(0,0)的积分曲线.

解 由于 $f(x,y)=x$ 不依赖于 y, 亦即在直线 $x=k$(k 为

常数)上，线素场的方向都相同，如图所示，图中 L 是通过点(0,0)的积分曲线，而其他的积分曲线均可由 L 沿 y 轴平行移动而得到.



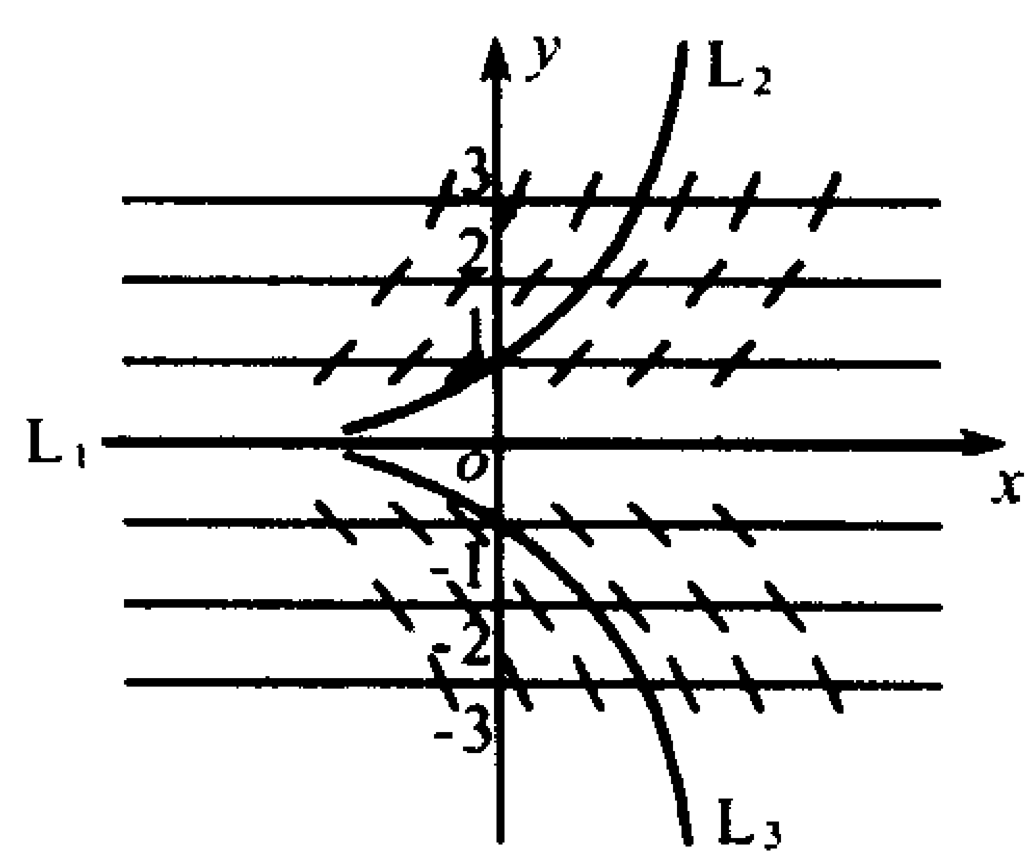
(第 30 题图)

【31】 画出方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$$

的线素场并分别近似画出方程过点(0,0)，(0,1)，(0,−1)的积分曲线.

解 由于 $f(x,y)=y$，不依赖于 x，因而在直线 $y=k$(k 为常数)上，线素场的方向都相同，如图. 显然 L_1: $y=0$ 是方程过点(0,0)的一条积分曲线，而 L_2，L_3 分别是通过点(0,1)，(0,−1)的积分曲线，除 $y=0$ 外，其它所有的积分曲线，均可由 L_2 和 L_3 沿 x 轴方向平行移动得到.



(第 31 题图)

【32】 画出方程

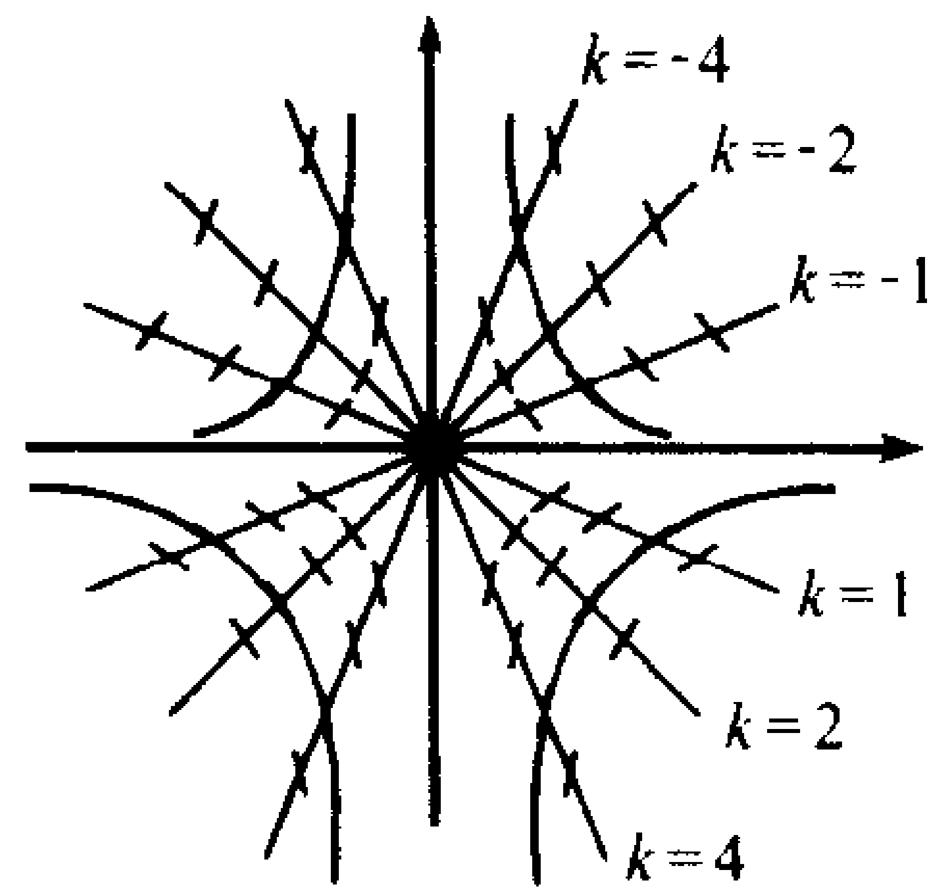
$$y'=-\frac{2y}{x}$$

的广义线素场，并近似画出它的积分曲线族.

解 显然，原点是惟一的奇点，除原点外，过平面上其它点的积分曲线是存在且惟一的.

作等斜线

$$-\frac{2y}{x}=k$$



（第 32 题图）

即 $$y=-\frac{k}{2}x$$

它们是过原点的直线束，线素场如图.

$y=0$，$x=0$ 皆是积分曲线，且直线 $x=0$，$y=0$ 把 xoy 平面分为四个象限，故积分曲线有四个分支.

在第一象限，$y'<0$，$y''>0$，此时积分曲线皆下降且呈凸形；

在第二象限，$y'>0$，$y''>0$，积分曲线皆上升且呈凸形；

在第三象限，$y'<0$，$y''<0$，积分曲线皆下降且呈凹形；

在第四象限，$y'>0$，$y''<0$，积分曲线皆上升且呈凹形.

综上所述，可作出积分曲线族的图形，如图中粗线所示.

【33】 画出方程

$$y'=2x-y$$

的线素场，并近似画出它的积分曲线族.

解 显然，在全平面上解是存在且惟一的.

作等斜线

$$2x-y=k$$

即

$$y=2x-k$$

线素场如图所示，图中分别作出了 $k=-3,-2,-1,0,1,2,3$ 的等斜线.

$k=0$ 时，即 $y=2x$ 把平面分为两部分，在区域 $y>2x$ 上，$y'<0$，积分曲线皆下降；在区域 $y<2x$ 上，$y'>0$，积分曲

线皆上升. 容易验证，$y=2x$ 不是方程的积分曲线，其它积分曲线若与之相交时，则取得最小值.

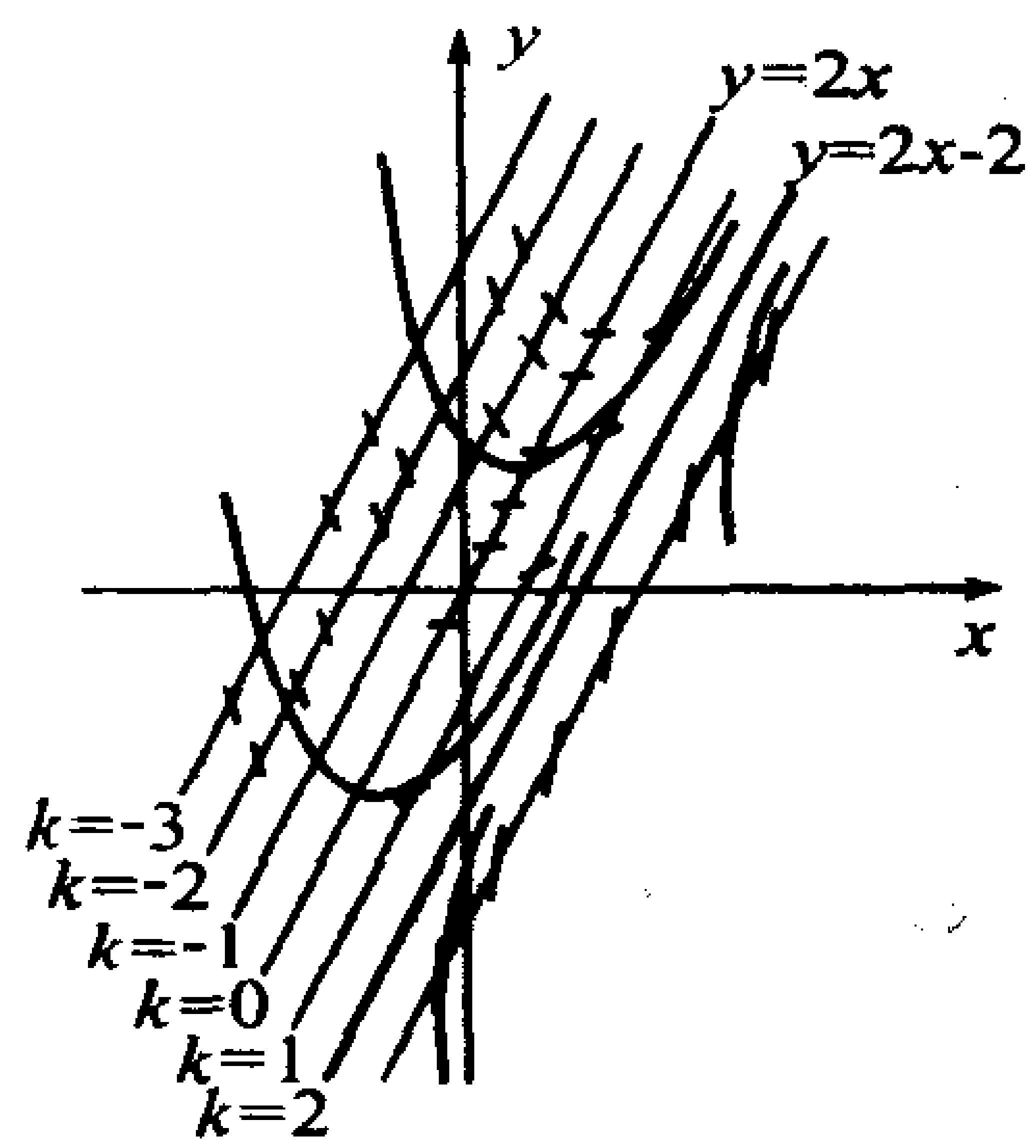
又由于

$$y''=2-y'=y-2x+2$$

令 $y''=0$，得

$$y=2x-2$$

它是 $k=2$ 时的等斜线，此直线的斜率与线素场的斜率相同，故它是积分曲线，由解的存在惟一性，其它积分曲线不会与之相交.



（第 33 题图）

在直线 $y=2x-2$ 的上方，$y''>0$，积分曲线呈凸形；在直线 $y=2x-2$ 的下方，$y''<0$，积分曲线呈凹形.

综上所述，可作出积分曲线族的图形，如图中粗线所示.

【34】 在 xoy 平面上，画出方程

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

的线素场并近似作出它的积分曲线.

解　显然，$O(0,0)$是原方程的惟一奇点.

作等斜线

$$\frac{x+y}{x-y}=k$$

即

$$y=\frac{k-1}{k+1}x$$

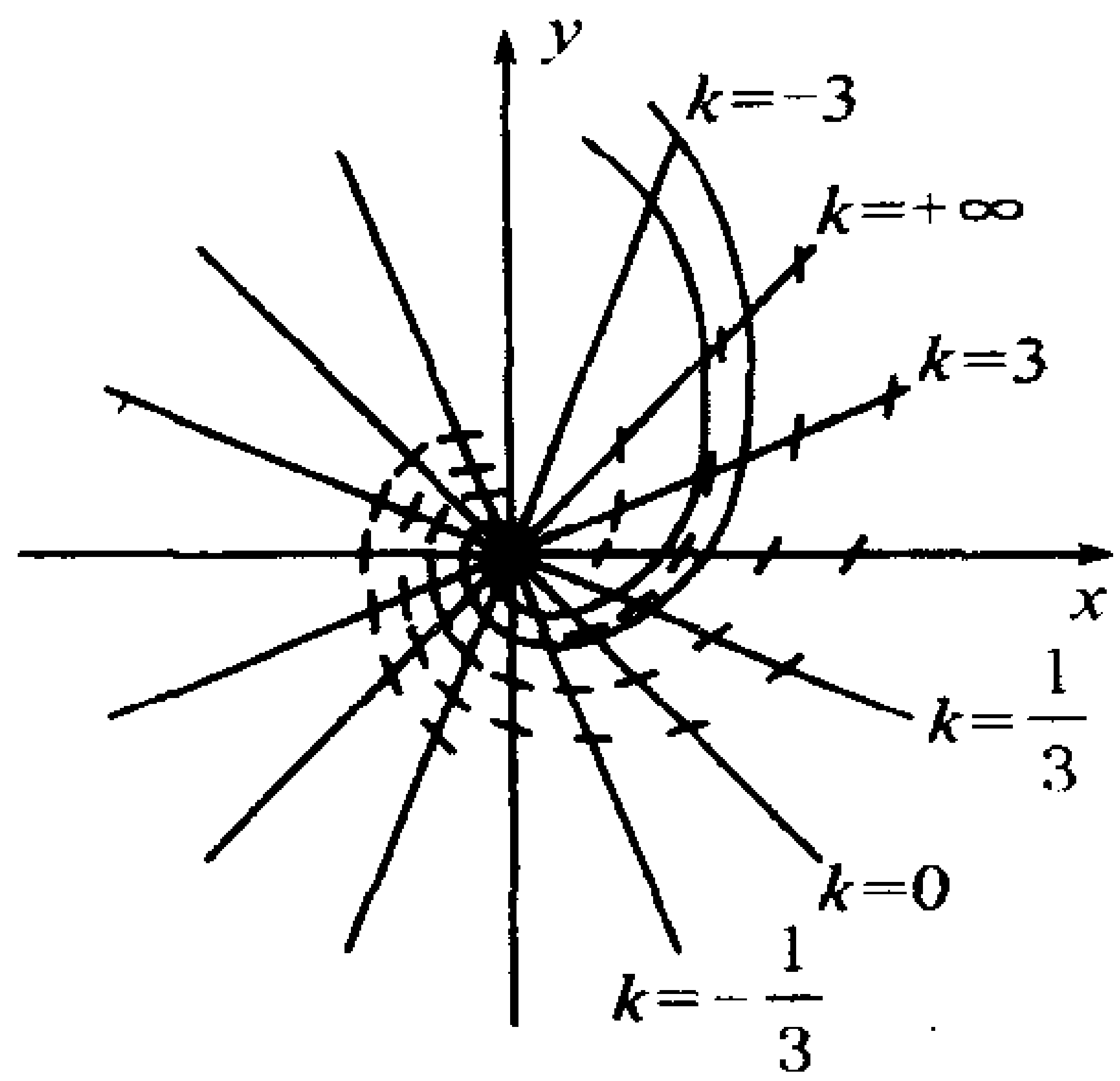
相应于 $k=-3,\ -1,\ -\frac{1}{3},\ 0$ 的等斜线分别为

$$y=2x,\ x=0,\ y=-2x,\ y=-x$$

相应于 $k=\frac{1}{3},\ 1,\ 3,\ +\infty$ 的等斜线分别为

$$y=-\frac{1}{2}x,\ y=0,\ y=\frac{1}{2}x,\ y=x$$

线素场与积分曲线族的图形如图 1 所示.



(第 34 题图 1)

现在，我们从另一角度来考虑.

令 $$\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad \tan\theta=\frac{y}{x},$$

则原方程化为

$$\tan\alpha=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

或

$$\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}=1$$

即

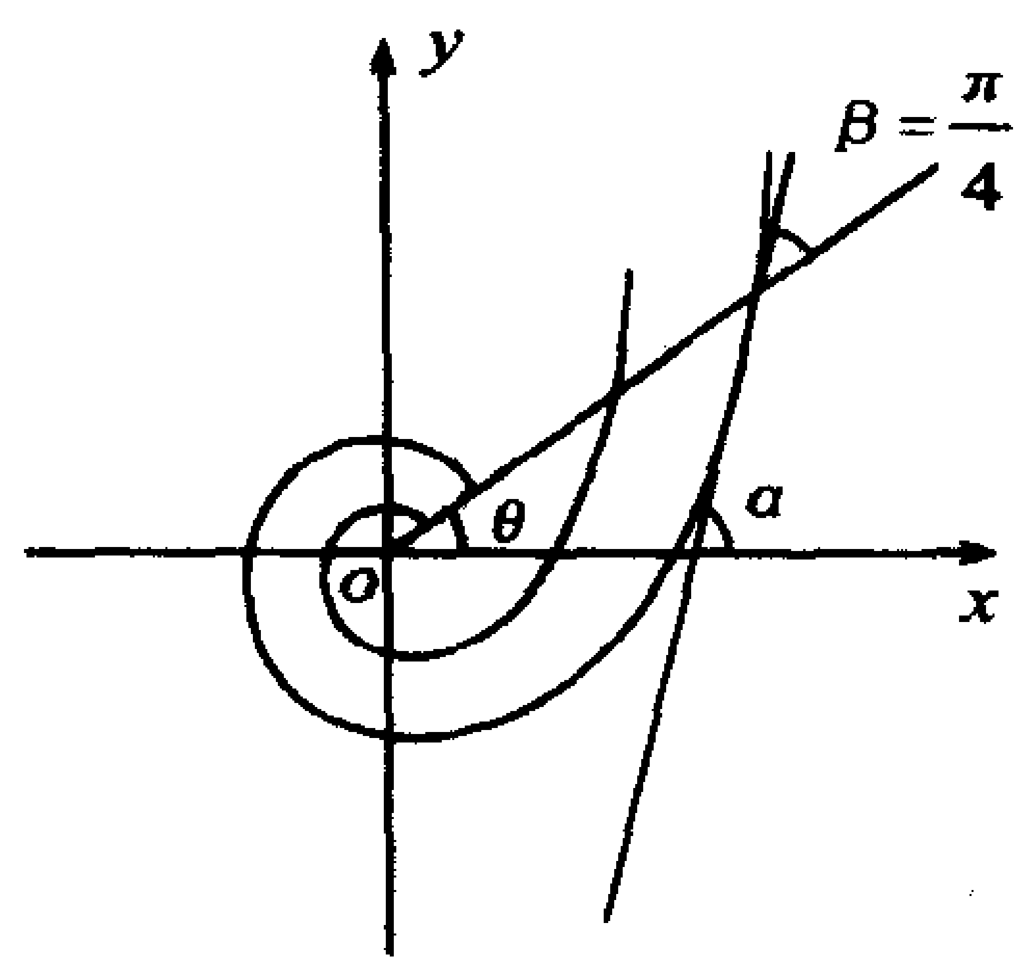
$$\tan(\alpha-\theta)=1$$

所以，$\alpha-\theta=\frac{\pi}{4}$.

这表明，积分曲线的向径与切线所成的角

$$\beta=\alpha-\theta=\frac{\pi}{4}$$

是一个常数. 根据数学分析的知识我们知道，这种曲线为等角螺线，于是原方程的积分曲线族为绕原点的等角螺线族. 如图 2 所示.



（第 34 题图 2）

第二章　初等积分法

所谓初等积分法，即能把某些类型的微分方程的求解问题化成初等函数的积分问题. 本章将介绍可用初等积分法求解的方程类型及其解法. 并不是所有的微分方程均可用初等积分法求解，因而掌握这些类型方程的基本解法是十分重要的.

§2.1　变量分离方程

提　　要

定义 1　形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{1}$$

的方程称为变量分离方程. 其中 $f(x)$，$g(y)$都是已知函数.

对于变量分离方程(1)，可以用初等积分法求解. 为此，假设 $f(x)$在区间 $a<x<b$ 上连续，$g(y)$在区间 $c<y<d$ 上连续，且 $g(y)\neq 0$. 把方程(1)改写成

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

两边求不定积分，得通解

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C\quad (C\text{ 为常数})$$

而满足初始条件

$$y(x_0)=y_0$$

的特解是

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x .$$

[注]　在上述变量分离过程中，必须 $g(y)\neq 0$. 但如果 $g(y)=0$有一个根为 $y=y_0$，则不难验证 $y=y_0$ 也是微分方程的一个解，有时它不包含在通解的表达式中，解题时要另外补上，不要遗漏.

题　　解

求解下列微分方程

【35】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln x$

解　将变量分离，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln x\mathrm{d}x \quad (y\neq 0)$$

两边积分得

$$\ln|y|=x\ln x-x+C_1$$

这里 C_1 是任意常数. 从上式解出 y 可得显式通解为

$$y=Ce^{x\ln x-x}$$

这里 C 是一个任意常数. 此外，$y=0$ 也是方程的解，它可以被包含在通解中(取 $C=0$).

【36】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln y$

解　若 $y\neq 1$，将变量分离，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\ln|\ln y| = x + C_1$$

即有 $\ln y = Ce^x$，得到显式通解为

$$y = e^{Ce^x}$$

这里 C 为任意常数. 此外，$y=1$ 也是方程的解，它可以被包含在通解中(取 $C=0$).

【37】 $\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x + y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y=0$

解 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{-y\sqrt{1-x^2}}$$

将变量分离，得到

$$\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \quad (-1<y<1)$$

两边积分得通解

$$\sqrt{1-y^2}=\arcsin x + C$$

此外，$y=\pm 1$ 也是方程的解，它们没有被包含在通解中.

【38】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$

解 将变量分离，得到

$$y\mathrm{d}y=\frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\frac{y^2}{2}=\frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C_1$$

因而，方程的通解为

$$y^2=\frac{2}{3}\ln|1+x^3|+C \quad (C=2C_1)$$

此外，由题意可知

$$y\neq 0, \qquad x\neq -1$$

所以，所求方程的通解为

$$y^2=\frac{2}{3}\ln|1+x^3|+C \quad (x\neq -1,\ y\neq 0).$$

【39】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\cos x\cos 2y)^2$

解　将变量分离，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{(\cos 2y)^2}=(\cos x)^2\mathrm{d}x \quad (\cos 2y\neq 0)$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\tan 2y=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C_1$$

因而，方程的通解为

$$\tan 2y=x+\sin x\cos x+C \quad (C=2C_1)$$

此外，$\cos 2y=0$，即 $y=\frac{\pi}{4}+\frac{n}{2}\pi$ $(n\in N)$也是方程的解，它们没有被包含在通解中.

【40】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$

解　将变量分离，得

$$(y+e^y)\mathrm{d}y=(x-e^{-x})\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\frac{y^2}{2}+e^y=\frac{x^2}{2}+e^{-x}+C_1$$

因而，方程的通解为

$$y^2-x^2+2(e^y-e^{-x})=C.$$

【41】 $(1+x)y\mathrm{d}x+(1-y)x\mathrm{d}y=0$

解 将方程改写为

$$\frac{y-1}{y}\mathrm{d}y=\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x \quad (y\neq 0)$$

两边积分得

$$y-\ln|y|=x+\ln|x|+C$$

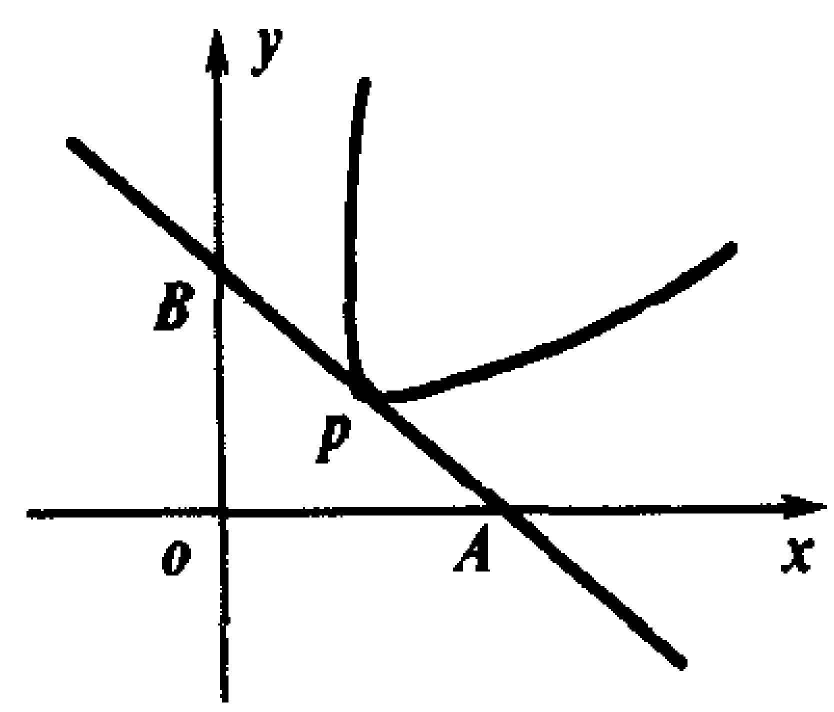
因而，方程的通解为

$$x-y+\ln|xy|+C=0$$

此外，$y=0$ 也是方程的解，它没有被包含在通解中.

【42】 求一曲线族，使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的两部分.

解 如图，设所求的曲线方程为 $y=y(x)$，过曲线上任一点 $p(x,y)$ 的切线交 ox 轴于 A 点，交 oy 轴于 B 点. 由题意，P 为 AB 的中点，不妨设 $A(2x,0)$，$B(0,2y)$，则切线的斜率为



（第 42 题图）

$$K=\frac{2y-0}{0-2x}=-\frac{y}{x}$$

另一方面，曲线在 P 点的切线的斜率为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$$

将变量分离，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_1$$

因此，方程的通解为

$$xy = C$$

即所求的曲线族为：$xy = C$，这里 C 为任意常数.

求解下列微分方程的初值问题

【43】 $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$，$y(0) = 1$

解　方法 1　将方程改写为

$$-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x \tag{1}$$

两边积分得

$$\frac{1}{y} = \ln|x^2-1| + C$$

为了确定所求的特解，以 $x=0$，$y=1$ 代入上式，即可解得 $C = 1$. 因而所求的特解为

$$y = \frac{1}{1+\ln|x^2-1|} \tag{2}$$

方法 2　将(1)式两边积分得

$$\int_1^y -\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \int_0^x \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

即
$$\frac{1}{y} - 1 = \ln|x^2-1|$$

同样得到特解(2).

【44】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(y-1)$，$y(0) = 1$

解　将变量分离，得到

$$\frac{1}{y(y-1)}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

方程可以改写为

$$\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\frac{y-1}{y}=Ce^{x}$$

把初始条件 $y(0)=1$ 代入上述通解表达式，即可求得 $C=0$. 因而，所求的特解为 $y=1$.

【45】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{y}\ln x$，$y(e)=1$

解 将变量分离，得到

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\ln x\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\int_1^y\frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\int_e^x\ln x\mathrm{d}x$$

即
$$\sqrt{y}\Big|_1^y=(x\ln x-x)\Big|_e^x$$

化简得到

$$\sqrt{y}-1=x\ln x-x$$

整理得所求初值问题的解为

$$y=(x\ln x-x+1)^2.$$

【46】 对变量分离方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)\tag{1}$$

设在矩形域 R：$a<x<b, c<y<d$ 上函数 $f(x), g(y)$ 均连续，且 $g(y)\neq0$. 求证对任意点 $(x_0,y_0)\in R$，方程(1)满足初始条件

$$y(x_0)=y_0\tag{2}$$

存在惟一解.

证　先设初值问题(1),(2)存在解 $y=\varphi(x)$，于是有恒等式

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x)g(\varphi(x))$$

因 $g(y)\neq 0$，将上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{g(\varphi(x))}=f(x)\mathrm{d}x$$

两边从 x_0 到 x 积分，得到

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)}\frac{\mathrm{d}\varphi(\xi)}{g(\varphi(\xi))}=\int_{x_0}^{x}f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

今以 $G(y),F(x)$分别表示$\dfrac{1}{g(y)}$及 $f(x)$的一个原函数，得

$$G(\varphi(x))-G(y_0)=F(x)-F(x_0) \tag{3}$$

因 $G'(y)=\dfrac{1}{g(y)}\neq 0$，$G(y)$是一单调函数，故由（3）可单值解出

$$\varphi(x)=G^{-1}[F(x)-F(x_0)+G(y_0)] \tag{4}$$

这里 G^{-1}表示 G 的反函数.

若初值问题(1),(2)的解存在，则按上述论证必可把解表为(4)的形式，从而证明了解的惟一性.

另一方面，将上述步骤逆推，不难验证(4)是初值问题(1),(2)的解. 这就证明了解的存在性.

[注]　若 $\exists\, y_1\in(c,d)$，$g(y_1)=0$，则初值问题(1),(2)的解的惟一性可能被破坏.

【47】　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2|y|^{\frac{1}{2}},y(0)=0$

解　容易看出 $y=0$ 为一解. 当 $y>0$ 时，原方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y^{\frac{1}{2}}$$

将变量分离，得到

$$y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$y^{\frac{1}{2}}=x-C_1\geqslant 0$$

考虑到 $y'>0, y(0)=0$ 及 $y=0$ 是解，应有

$$y=\begin{cases}(x-C_1)^2 & \text{当 } x\geqslant C_1\geqslant 0\\ 0 & \text{当 } x<C_1\end{cases}$$

当 $y<0$ 时，原方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2(-y)^{\frac{1}{2}}$$

将变量分离，得到

$$(-y)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$(-y)^{\frac{1}{2}}=-x+C_2\geqslant 0$$

同样理由得

$$y=\begin{cases}-(x-C_2)^2 & \text{当 } x\leqslant C_2\leqslant 0\\ 0 & \text{当 } x>C_2\end{cases}$$

因此，满足 $y(0)=0$ 的特解可写成

$$y=\begin{cases}-(x-C_2)^2 & \text{当 } x\leqslant C_2\leqslant 0\\ 0 & \text{当 } C_2<x<C_1\\ (x-C_1)^2 & \text{当 } x\geqslant C_1\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $C_1\geqslant 0, C_2\leqslant 0$ 为任意常数. 原初值问题有无穷多个解.

【48】 人工繁殖细菌，其增长速度和当时的细菌数成正比.

1）如果过 4 小时细菌数即为原来的 2 倍，那么经过 12 小时应有多少？

2）如在 3 小时的时候有细菌 10^4 个，在 5 小时时有 4×10^4 个，那么在开始时有多少个？

解 设时刻 t 的单位体积的细菌数为 $x(t)$，增长速度为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，则由题意得 $x(t)$满足题意的方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx \quad (k\text{ 为一正的常数})$$

所以 $x(t)$满足的方程为

$$x=Ce^{kt} \quad (C\text{ 为常数})$$

再设初始时刻即 $t=0$ 时，细菌数为 x_0，则

$$x=x_0e^{kt}$$

1）由题意知： $x_0e^{4k}=2x_0$

所以，$e^{4k}=2$，经过 12 小时后，$x=x_0e^{12k}=8x_0$，即经过 12 小时，细菌数为原来的 8 倍.

2）由题意知，

$$\begin{cases}10^4=x_0e^{3k}\\4\times10^4=x_0e^{5k}\end{cases}$$

解得 $x_0=1.25\times10^3$(个/单位体积).

§2.2 齐次方程

提　要

定义 1　形如

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

的方程称为齐次方程，其中 $g(u)$是 u 的已知函数.

齐次方程(1)可通过引入变量代换，这里设函数 $g(u)$在 $a<u<b$ 上连续，即令

$$u=\frac{y}{x}\quad (\text{或 } y=ux)$$

这里 u 是新的未知函数. 于是

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

把它们代入(1)，化为如下的变量可分离方程

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$$

有些方程，可以经过变量代换化为齐次方程.例如，形如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \tag{2}$$

的方程.下面分三种情形来讨论:

1)　$c_1=c_2=0$

这时，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}$，这是齐次方程.

2)　$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，及 $c_1^2+c_2^2\neq 0$. 这时可作变换

$$x=\xi+h,\qquad y=\eta+k$$

(这里 h、k 是 $a_1h+b_1k+c_1=0, a_2h+b_2k+c_2=0$ 的解)可将方程化为齐次方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}$$

3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, 及 $c_1^2+c_2^2\neq 0$. 这时可设

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$$

则方程(2)化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2} \tag{3}$$

令上式的右端为 $f(a_2x+b_2y)$, 为此只要令

$$a_2x+b_2y=u$$

则方程(3)可进一步化为

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$$

显然，这是变量分离方程. 在实际求解时，可按具体情况，分别作出适当变换. 求解后，再代回原变量 x、y，就得到原方程的通解.

题　解

【49】 $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$

解　将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

这是齐次方程，作变换 $u=\dfrac{y}{x}$，代入方程得到

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2u - u^2 \tag{1}$$

可整理为

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (u \neq 0,1)$$

两边积分，得

$$\ln\left|\frac{u}{u-1}\right| = \ln|Cx|$$

去掉对数后，得到

$$u = \frac{Cx}{Cx-1}$$

代回原变量，得通解

$$y = \frac{Cx^2}{Cx-1}$$

此外，方程(1)还有解 $u=0$ 和 $u=1$，即

$$y=0 \quad 和 \quad y=x$$

也是原方程的解. 如果在通解中允许 $C=0$，则 $y=0$ 已包含在通解中，但 $y=x$ 不包含于其中.

【50】 $xy' - y = x\tan\dfrac{y}{x}$

解 将方程改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$$

这是齐次方程，作变换 $y = xu$，代入原方程得到

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u = \tan u$$

即

$$\cot u\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (\sin u \neq 0) \tag{1}$$

两边积分得

$$\sin u = Cx$$

代回原变量，得通解

$$\sin\frac{y}{x} = Cx$$

此外，方程还有解 $\sin u = 0$，它包含在通解中.

【51】 $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

解　将方程改写成

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\frac{x+y}{x}$$

这是齐次方程，作变换 $u=\frac{y}{x}$，代入方程得到

$$x\frac{du}{dx} = (1+u)\ln(1+u)$$

分离变量，得到

$$\frac{du}{(1+u)\ln(1+u)} = \frac{dx}{x} \quad (u\neq 0, -1)$$

两边积分得

$$\ln(1+u) = Cx$$

代回原变量，即得原方程通解为

$$\ln\left(1+\frac{y}{x}\right) = Cx$$

即

$$y = x(e^{Cx}-1)$$

此外，方程还有解 $y=0, y=-x$ 它们没有被包含在通解中.

【52】 $xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y$

解　将方程改写成

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$$

这是齐次方程，作变换 $u=\frac{y}{x}$，代入方程得

$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}$$

将变量分离，得

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}\quad(-1<u<1)$$

两边积分得

$$\arcsin u=\ln|Cx|$$

代回原变量，则得到方程的通解为

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|Cx|$$

此外，$y=\pm x$ 也是方程的解，它们不含在通解中.

【53】 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$

解 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$$

作变换 $u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，把它们代入方程得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}$$

将变量分离，得

$$\frac{u-1}{u}du=\frac{dx}{x}\quad(u\neq0)$$

两边积分得

$$u-\ln|u|=\ln|C'x| \quad (C' \text{为常数})$$

代回原变量，并整理得通解

$$y=\frac{1}{C'}\ e^{\frac{y}{x}}$$

此外，$y=0$ 也是方程的解.于是，方程的通解也可用下面的式子表述，

$$y=Ce^{\frac{y}{x}} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

【54】 $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$

解　方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-\frac{1}{\cos\frac{y}{x}}$$

作变换 $u=\frac{y}{x}$，代入方程得到

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\frac{1}{\cos u}$$

进一步化简，得

$$\cos u\,\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分得

$$\sin u=-\ln|x|+C$$

代回原变量，得原方程通解

$$\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C.$$

【55】 $(y^2-2xy)\mathrm{d}x=(x^2-2xy)\mathrm{d}y$

解　将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

作变换 $u=\frac{y}{x}$，代入方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2-2u}{1-2u}$$

整理得

$$\frac{1-2u}{3u(u-1)}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad (u\neq 0,1)$$

两边积分得到

$$\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|-2\ln|u-1|=\ln|x|^3+C_1$$

代回原变量，整理得通解

$$xy(y-x)=C$$

此外，方程还有解 $y=0$ 及 $y=x$，它们被包含在上述通解中.

【56】 $(1+e^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$

解 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)e^{\frac{x}{y}}}{1+e^{\frac{x}{y}}}$$

这是以 x 为未知函的齐次方程，作变换如 $u=\frac{x}{y}$，代入方程得

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{(u-1)e^u}{1+e^u}$$

将变量分离，得

$$\frac{1+e^u}{u+e^u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

两边积分得

$$(e^u + u)y = C$$

代回原变量，得通解

$$x + ye^{\frac{x}{y}} = C.$$

【57】 $(2x-4y+6)\mathrm{d}x+(x+y-3)\mathrm{d}y=0$

解　将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4y-2x-6}{x+y-3}$$

我们可通过适当的坐标变换，将方程化为齐次方程. 方程组

$$\begin{cases}4\beta-2\alpha-6=0\\ \alpha+\beta-3=0\end{cases}$$

有解 $\alpha=1$，$\beta=2$，作变换

$$x=\xi+1,\qquad y=\eta+2$$

代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{4\eta-2\xi}{\xi+\eta}$$

这是齐次方程，再作变换 $u=\frac{\eta}{\xi}$，则上述方程可化为

$$u+\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{4u-2}{1+u}$$

变量分离，得到

$$\frac{u+1}{(u-1)(u-2)}\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\quad(u\neq1,2)$$

两边积分得

$$(u-2)\left(\frac{u-2}{u-1}\right)^2\xi=C$$

代回原变量，得原方程通解

$$(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$$

另外，$u=1$，$u=2$,即 $y=x+1$，$y=2x$ 也是方程的解. 易见，$y=2x$ 包含于通解中，而 $y=x+1$ 不被包含于其中.

【58】 $(2x+y+1)\mathrm{d}x-(4x+2y-3)\mathrm{d}y=0$

解 令 $z=2x+y$，代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{5z-5}{2z-3}$$

将变量分离，得

$$\frac{2z-3}{z-1}\mathrm{d}z=5\mathrm{d}x \quad (z\neq 1)$$

两边积分得

$$2z-\ln|z-1|=5x+C_1$$

代回原变量，得方程通解

$$2x+y-1=Ce^{2y-x}$$

此外，$z=1$ 是解，即 $y=1-2x$ 是方程的解，它被包含在通解中.

【59】 $(2x^2+3y^2-7)x\mathrm{d}x-(3x^2+2y^2-8)y\mathrm{d}y=0$

解 将方程改写为

$$\frac{2y\mathrm{d}y}{2x\mathrm{d}x}=\frac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$$

令 $x^2=u$，$y^2=v$,代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{2u+3v-7}{3u+2v-8}$$

这是一个可化为齐次的方程. 解方程组

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta-7=0\\3\alpha+2\beta-8=0\end{cases}$$

得 $\alpha=2$，$\beta=1$. 令

$$u=\xi+2,\qquad v=\eta+1$$

代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{2\xi+3\eta}{3\xi+2\eta}$$

这是齐次方程，作变换 $t=\frac{\eta}{\xi}$，则方程可进一步化为

$$\frac{3+2t}{2(1-t^2)}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\quad(t\neq\pm1)$$

两边积分得

$$\frac{1+t}{(1-t)^5}=C\xi^4$$

代回原变量，得原方程通解

$$x^2+y^2-3=C(x^2-y^2-1)^5$$

此外，$t=\pm1$ 也是方程的解，即 $y^2=x^2-1$，$y^2=-x^2+3$ 都是方程的解. 易见，$y^2=x^2-1$ 不包含在通解中，而 $y^2=-x^2+3$ 被包含在上述通解中.

【60】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

解　令 $v=y+2, u=x-3$，代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2$$

这是齐次方程，再作变换 $z=\frac{v}{u}$，则方程化为

$$z+u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=2\left(\frac{z}{1+z}\right)^2$$

将变量分离，得

$$\frac{(1+z)^2}{z(1+z^2)}dz = -\frac{du}{u} \quad (z\neq 0)$$

两边积分得

$$\ln|zu| = -2\arctan z + \ln|C|$$

代回原变量，得通解

$$y+2 = Ce^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}}$$

此外，$z=0$ 即 $y=-2$ 也是解，它包含在上述通解中.

【61】 $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$

解 首先解方程组

$$\begin{cases} b-a+1=0 \\ b+a+5=0 \end{cases}$$

得解 $a=-2$，$b=-3$. 令 $x=\xi-2$，$y=\eta-3$，代入方程得

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta-\xi}{\eta+\xi}$$

这是齐次方程，作变换 $u=\frac{\eta}{\xi}$，代入上式得

$$\frac{1+u}{1+u^2}du = -\frac{d\xi}{\xi}$$

两边积分得

$$2\arctan u + \ln(1+u^2) = -2\ln|\xi| + C$$

由于 $u=\frac{\eta}{\xi}$，于是得

$$\ln(\xi^2+\eta^2) = C - 2\arctan u$$

代回原变量，即得原方程通解为

$$\ln[(x+2)^2+(y+3)^2] + 2\arctan\frac{y+3}{x+2} = C.$$

【62】 求一曲线，使得通过这曲线上任一点 P 的切线$\overline{PQ}$与向径$\overline{OP}$的交角等于 $45°$.

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，由第一章习题 12 知 $y=y(x)$满足方程

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

这是齐次方程，作变换 $u=\frac{y}{x}$，代入方程得

$$\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分得

$$2\arctan u-\ln|1+u^2|=2\ln|x|+C$$

代回原变量，得

$$2\arctan\frac{y}{x}=\ln(x^2+y^2)+C\ .$$

求下列初值问题的解

【63】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x},y(1)=4$

解　这是齐次方程，令 $u=\frac{y}{x}$，代入原方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{u}+u$$

将变量分离，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分得

$$\sqrt{u}=\ln|x|+C$$

代回原变量得

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln|x|+C$$

把初始条件 $y(1)=4$ 代入上式，解出 $C=2$. 因此所求解为

$$y=x(\ln|x|+2)^2.$$

【64】 $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$, $y(1)=\frac{1}{2}$

解 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

作变换 $u=\frac{y}{x}$，代入上式得

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{1-u^2}$$

将变量分离，得

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}$$

两边积分得

$$\arcsin u=\ln|x|+C$$

代回原变量得

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+C$$

把初值条件代入上式，解出 $C=\frac{\pi}{6}$. 于是，所求的解为

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+\frac{\pi}{6}.$$

【65】 $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$, $y(1)=1$

解 作变换 $u=\frac{y}{x}$，代入方程得

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u\ln u$$

将变量分离，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分得

$$\ln u - 1 = Cx$$

代回原变量得

$$\ln\frac{y}{x} - 1 = Cx$$

把初始条件 $y(1)=1$ 代入上式，解出 $C=-1$. 因此，所求的解为

$$y = xe^{1-x}.$$

【66】 对齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

设函数 $g(u)$在 $a<u<b$ 上连续且$g(u)\neq u$，$D=\left\{(x,y)\,\middle|\, a<\frac{y}{x}<b\right\}$. 求证对任意$(x_0,y_0)\in D$，方程(1)满足初始条件

$$y(x_0) = y_0$$

存在惟一解.

证　令 $y=ux$，则(1)改写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{g(u)-u}{x}$$

此为变量分离方程，$g(u)\neq u$，引用§2.1 习题 46 的结果即可证明本题结论.

【67】 齐次方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right)$满足上题的条件. 求证方程在区域 D 内所有积分曲线彼此相似，且以原点为相似中心.

证 令 $y=ux$，将方程化为变量分离方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{g(u)-u}{x} \tag{1}$$

两边积分得积分曲线族

$$\ln|x|=G\left(\frac{y}{x}\right)+C \tag{2}$$

其中 $G(u)$为$\frac{1}{g(u)-u}$的一个原函数. 特别

$$\ln|x|=G\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

是它的一条积分曲线.对(3)式，适当选取常数 C_1,C_2,以 C_1x，C_2y 代x,y，则曲线(3)可变为曲线族(2)中的任一曲线. 本题得证.

【68】 证明:若 $y'=f(x,y)$是齐次的，则微分方程可改写为 $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 $g\left(\frac{y}{x}\right)$仅依赖于商$\frac{y}{x}$.

证 因 $f(x,y)=f(tx,ty)$对所有的 t 成立，特别地，它对 $t=\frac{1}{x}$成立. 于是

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

若定义 $g\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$，则有

$$y'=g\left(\frac{y}{x}\right).$$

§2.3　一阶线性方程与伯努利(Bernoulli)方程

提　要

定义1　形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x) \tag{1}$$

的方程称为一阶线性方程,，其中 $p(x)$、$q(x)$是某个区间内的已知函数.

假设 $p(x)$，$q(x)$都在(a,b)内连续，先用分离变量法求其对应的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0$$

得通解

$$y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

设想非齐次方程(1)也具有这种形式的解，但其中 C 应为函数 $C(x)$，即令

$$y=C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

代入线性方程，经化简，得

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

再积分，求得 $C(x)$，代回解的形式，得线性方程(1)的通解公式

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\quad(C\text{ 为任意常数})$$

这种将常数变易为待定函数的方法，通常称为常数变易法.

定义 2 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

的方程，称为伯努利方程. 其中 $p(x)$、$q(x)$是在某个区间内的已知函数.

对这类方程，只要借助于变量代换，就可化为线性方程. 作变换

$$z=y^{1-n}$$

将上述伯努利方程变为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$$

这是关于未知函数 z 的线性方程，它的通解可由常数变易法求得，最后代回原变量 y，就得到伯努利方程的解. 显然 $y=0$ 也是伯努利方程的解.

题　　解

求解下列方程

【69】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2xy+4x$　　(1)

解 首先求线性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=0$$

的通解. 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-2x\mathrm{d}x \quad (y\neq 0)$$

两边积分，化简后得到

$$y=Ce^{-x^2}$$

再应用常数变易法求线性非奇次方程的通解，为此，在上式中

把常数 C 变易成待定函数 $C(x)$，即令

$$y=C(x)e^{-x^2}$$

代入原方程，得到

$$C'(x)e^{-x^2}-2xC(x)e^{-x^2}=-2xC(x)e^{-x^2}+4x$$

化简得

$$C'(x)=4xe^{x^2}$$

上式两边积分得

$$C(x)=2e^{x^2}+C$$

于是，原方程的通解为

$$y=2+Ce^{-x^2}.$$

【70】 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x-2}\cdot y=2(x-2)^2$

解　首先求线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x-2}=0$$

的通解. 分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x-2}\quad(y\neq0)$$

两边积分，化简后得到

$$y=C(x-2)$$

设原方程通解为

$$y=C(x)(x-2)$$

代入原方程，得到

$$C'(x)=2(x-2)$$

上式两边积分得

$$C(x)=x^2-4x+C$$

于是，所求的通解为

$$y=(x-2)(C+x^2-4x).$$

【71】 $xy'-2y=2x^4$

解 方法1:将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=2x^3$$

首先求线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=0$$

的通解. 分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=\frac{2}{x}dx \quad (y\neq 0)$$

两边积分，化简后得到

$$y=Cx^2$$

设原方程通解为

$$y=C(x)x^2$$

代入原方程，得到

$$C'(x)=2x$$

两边积分得

$$C(x)=x^2+C$$

于是，所求通解为

$$y=x^2(C+x^2)$$

方法2:将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=2x^3$$

上式两边同乘$\frac{1}{x^2}$，得

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 2x$$

两边积分得

$$\frac{y}{x^2} = x^2 + C$$

于是，所求通解为

$$y = x^2(C + x^2).$$

【72】　$y' + y\tan x = \sec x$

解　首先求线性齐次方程

$$y' + y\tan x = 0$$

的通解. 分离变量，得

$$\frac{dy}{y} = -\tan x dx \quad (y \neq 0)$$

两边积分，化简后得到

$$y = C \cdot \cos x$$

设所求方程的解为

$$y = C(x)\cos x$$

代入原方程，得到

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

上式两边积分得

$$C(x) = C + \tan x$$

于是，原方程的通解为

$$y = \cos x(C + \tan x) = \sin x + C \cdot \cos x.$$

【73】　$xy' + (1 + x)y = 3x^2 e^{-x}$

解　将方程改写为

$$y' + \frac{1+x}{x}y = 3xe^{-x}$$

先求线性齐次方程

$$y' + \frac{1+x}{x}y = 0$$

的通解. 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x \quad (y \neq 0)$$

两边积分，化简后得到

$$y = C \cdot \frac{e^{-x}}{x}$$

设所求通解为

$$y = C(x)\frac{e^{-x}}{x}$$

代入原方程，得

$$C'(x) = 3x^2$$

两边积分得

$$C(x) = x^3 + C$$

于是，原方程的通解为

$$y = \frac{e^{-x}}{x}(C + x^3).$$

【74】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 - \dfrac{y}{x}$

解 首先求线性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = 0$$

的通解. 将变量分离，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (y \neq 0)$$

两边积分得

$$y=\frac{C}{x}$$

设原方程通解为

$$y=\frac{C(x)}{x}$$

代入原方程，化简得到

$$C'(x)=x^3$$

两边积分得

$$C(x)=\frac{x^4}{4}+C$$

因此，所求方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}\left(C+\frac{x^4}{4}\right).$$

【75】 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$

解 这是以 s 为未知函数的线性方程，首先求线性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s\cos t=0$$

的通解. 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{s}=-\cos t\,\mathrm{d}t$$

两边积分得

$$s=Ce^{-\sin t}$$

设所求通解为

$$s=C(t)e^{-\sin t}$$

代入原方程，化简后得

$$C'(t)=\frac{1}{2}\sin 2t\cdot e^{\sin t}$$

上式两边积分，得

$$C(t)=(\sin t-1)e^{\sin t}+C$$

于是，方程的通解为

$$s=\sin t-1+Ce^{-\sin t}.$$

【76】 $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$

解 首先求线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y=0$$

的通解. 分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=\frac{2x-1}{x^2}dx$$

两边积分得

$$y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}$$

设原方程通解为

$$y=C(x)x^2e^{\frac{1}{x}}$$

代入原方程，得到

$$C'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

两边积分得

$$C(x)=C+e^{-\frac{1}{x}}$$

于是，所求方程的通解为

$$y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2.$$

【77】 $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$

解　若对调 x 与 y 的地位，即可把方程化为

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y\ln y}+\frac{1}{y}$$

这是以 x 为未知函数的一阶线性方程，先求线性齐次方程

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y\ln y}=0$$

的通解．分离变量，得

$$\frac{dx}{x}=-\frac{1}{y\ln y}dy$$

两边积分得

$$x=\frac{C}{\ln y}$$

为求得原方程通解，设

$$x=\frac{C(y)}{\ln y}$$

代入原方程，得

$$C'(y)=\frac{1}{y}\ln y$$

两边积分得

$$C(y)=C+\frac{(\ln y)^2}{2}$$

所以，所求方程的通解为

$$x=\frac{C}{\ln y}+\frac{\ln y}{2}.$$

【78】　$y'=\dfrac{y}{2y\ln y+y-x}$

解　初看上去，似乎无法着手求解，但若对调 x 与 y 的地位、即可把原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{x}{y}+1+2\ln y$$

这是以 x 为未知函数的一阶线性方程，先求它对应的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{x}{y}$$

的通解. 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

两边积分得

$$x=\frac{C}{y}$$

令 $x=\dfrac{C(y)}{y}$，代入原方程，得

$$C'(y)=y+2y\ln y$$

两边积分得

$$C(y)=C+y^2\ln y$$

于是，所求通解为

$$x=\frac{C}{y}+y\ln y.$$

【79】 $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$，其中 $f(x)$，$f'(x)$为已知的连续函数.

解 这是线性方程，先求齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f'(x)\cdot y=0$$

的通解. 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-f'(x)\mathrm{d}x \quad (y\neq 0)$$

两边积分得

$$y = Ce^{-f(x)}$$

设原方程通解为

$$y = C(x)e^{-f(x)}$$

代入原方程，得

$$C'(x) = f(x)f'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$C(x) = C + f(x)e^{f(x)} - e^{f(x)}$$

于是，所求方程的通解为

$$y = Ce^{-f(x)} + f(x) - 1.$$

【80】 $f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x)$,其中 $f(y)$,$f'(y)$,$p(x)$,$q(x)$都是连续函数.

解 将原方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}x} + p(x)f(y) = q(x)$$

这是以 $f(y)$为未知函数的线性方程，它的通解为

$$f(y) = e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right).$$

【81】 求初值问题

$$y' + y = Q(x), \qquad y(0) = 0$$

的连续解，其中

$$Q(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

解 用常数变易法，可求得通解为

$$y = e^{-x}\left(C + \int Q(x)e^{x}\mathrm{d}x\right)$$

即

$$y=\begin{cases}e^{-x}(C+2e^{x}) & 0\leqslant x\leqslant 1\\ C_1e^{-x} & x>1\end{cases}$$

代入初始条件

$$y(0)=0$$

得 $C=-2$，即

$$y=2(1-e^{-x})\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

则有

$$y(1)=2(1-e^{-1})$$

本题要求有连续解，即应有

$$C_1e^{-1}=y(1)=2(1-e^{-1})$$

解出

$$C_1=2(e-1)$$

所以，所求解为

$$y=\begin{cases}2(1-e^{-x}) & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2(e-1)e^{-x} & x>1\ .\end{cases}$$

解下列伯努利方程

【82】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy+xy^4=0$

解 这是 $n=4$ 的伯努利方程.作变换

$$z=y^{-3}$$

代入原方程，得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=6xz+3x$$

这是以 z 为未知函数的线性方程，它的通解为

$$z=e^{\int 6x\mathrm{d}x}\left[C+\int 3xe^{-\int 6x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

整理得

$$z = Ce^{3x^2} - \frac{1}{2}$$

代回原变量，得到原方程的通解

$$\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}$$

即

$$y = \left(\frac{1}{-\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

此外，还有特解 $y = 0$.

【83】　$y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1 - 2x)y^4$

解　这是 $n = 4$ 的伯努利方程. 令

$$z = y^{-3}$$

代入原方程，化简得

$$\frac{dz}{dx} = z - (1 - 2x)$$

这是线性方程，它的通解为

$$z = e^x\left[C + \int(2x - 1)e^{-x}dx\right]$$

整理得

$$z = Ce^x - 2x - 1$$

代回原变量，得到原方程的通解

$$\frac{1}{y^3} = Ce^x - 2x - 1$$

即

$$y = \left(\frac{1}{Ce^x - 2x - 1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

此外，还有特解 $y=0$.

【84】 $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$

解 令 $z=y^{-1}$，代入原方程，化简得

$$\frac{dz}{dx}=z-\cos x+\sin x \tag{1}$$

这是线性方程，先求出线性齐次方程

$$\frac{dz}{dx}=z$$

的通解为

$$z=Ce^x$$

设上述线性方程(1)的通解为 $z=C(x)e^x$，代入线性方程(1)，经化简，整理得

$$C'(x)=(\sin x-\cos x)e^{-x}$$

两边积分得

$$C(x)=C+(-e^{-x}\sin x)$$

所以线性方程(1)的通解为

$$z=Ce^x-\sin x$$

代回原变量，得到原方程通解

$$y=\frac{1}{Ce^x-\sin x}$$

此外，还有特解 $y=0$.

【85】 $x\,dy-\{y+xy^3(1+\ln x)\}dx=0$

解 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+(1+\ln x)y^3$$

这是伯努利方程，令 $z=y^{-2}$，代入原方程得

$$\frac{dz}{dx} = -2\frac{z}{x} - 2(1+\ln x) \tag{1}$$

可求出线性齐次方程

$$\frac{dz}{dx} + 2\frac{z}{x} = 0$$

的通解为

$$z = \frac{C}{x^2}$$

再用常数变易法易求得线性非齐次方程(1)的通解为

$$z = \frac{1}{x^2}\left(C - \frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}\ln x \cdot x^3\right)$$

代回原变量，得到原方程的通解

$$y^2 = \frac{1}{C - \frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}\ln x \cdot x^3}x^2$$

此外，还有特解 $y=0$.

【86】 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - x}{2xy}$

解　原方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y}$$

令 $z=y^2$，代入上式得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - 1 \tag{1}$$

上式两边同乘$\dfrac{1}{x}$，并整理得

$$\left(\frac{z}{x}\right)' = -\frac{1}{x}$$

两边积分得

$$\frac{z}{x}=C-\ln|x|$$

这样，得到线性方程(1)的通解为

$$z=Cx-x\ln|x|$$

代回原变量，得原方程通解

$$y^2=Cx-x\ln|x|$$

此外，y 出现在分母位置，不可取 0.

【87】 $(y\ln x-2)y\mathrm{d}x=x\mathrm{d}y$

解 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2y}{x}+\frac{\ln x}{x}y^2$$

令 $z=y^{-1}$，代入原方程，化简得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2z}{x}-\frac{\ln x}{x} \tag{1}$$

线性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2z}{x}=0$$

的通解为

$$z=Cx^2$$

设 $z=C(x)x^2$，代入线性非齐次方程(1)得

$$C'(x)=-\frac{1}{x^3}\ln x$$

两边积分得

$$C(x)=C+\frac{1}{4x^2}(1+2\ln x)$$

因此，

$$z=Cx^2+\frac{1}{4}(1+2\ln x)$$

代回原变量，得原方程通解

$$y=\frac{1}{Cx^2+\frac{1}{4}(1+2\ln x)}$$

此外，$y=0$ 也是一解.

【88】 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}(e^y+3x)$

解　作变换 $u=e^y$，则方程可化为

$$\frac{du}{dx}=\frac{3u}{x}+\frac{u^2}{x^2}$$

这是 $n=2$ 的伯努利方程，令 $z=u^{-1}$，代入上式，化简得

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{3}{x}z-\frac{1}{x^2} \tag{1}$$

线性齐次方程

$$\frac{dz}{dx}+\frac{3z}{x}=0$$

的通解为

$$z=\frac{C}{x^3}$$

设 $z=\frac{C(x)}{x^3}$，代入线性方程(1)，得

$$C(x)=C-\frac{x^2}{2}$$

因此，线性方程(1)的通解为

$$z=\frac{C}{x^3}-\frac{1}{2x}$$

代回原变量，得原方程通解

$$e^y=\frac{x^3}{C-\frac{1}{2}x^2}$$

即

$$y=\ln\left(\frac{x^3}{C-\frac{1}{2}x^2}\right).$$

【89】 $xy'\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$

解 令 $u=\cos y$，代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{x\ln x}-\frac{u^2}{\ln x}$$

这是伯努利方程，作变换 $z=u^{-1}$，化简得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{z}{x\ln x}+\frac{1}{\ln x} \tag{1}$$

这是线性方程. 先求出线性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{z}{x\ln x}=0$$

的通解为

$$z=\frac{C}{\ln x}$$

设 $z=\dfrac{C(x)}{\ln x}$，代入线性方程(1)，得

$$C'(x)=1$$

两边积分得

$$C(x)=x+C$$

所以，上述线性方程(1)的通解为

$$z=\frac{1}{\ln x}(C+x)$$

代回原变量，得原方程的通解

$$\cos y=\frac{\ln x}{C+x}$$

此外，$u=0$ 即 $y=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$也是原方程的解.

【90】 $y' = \frac{1}{x^2 \sin y - xy}$

解　把方程改写成

$$\frac{dx}{dy} = -yx + \sin y \cdot x^2$$

这是以 x 为未知函数的伯努利方程. 令 $z = \frac{1}{x}$，代入上式得

$$\frac{dz}{dy} = yz - \sin y$$

两边同乘 $e^{-\frac{y^2}{2}}$ 并整理得

$$e^{-\frac{y^2}{2}}\left(\frac{dz}{dy} - yz\right) = -e^{-\frac{y^2}{2}} \sin y$$

得

$$\left(ze^{-\frac{y^2}{2}}\right)' = -e^{-\frac{y^2}{2}} \sin y$$

两边积分得通解

$$z = -e^{\frac{y^2}{2}} \int e^{-\frac{y^2}{2}} \sin y dy + Ce^{\frac{y^2}{2}}$$

原方程的通解为

$$x = e^{-\frac{y^2}{2}}\left(C - \int e^{-\frac{y^2}{2}} \sin y dy\right)^{-1}.$$

【91】 $3xy' - 3xy^4 \ln x - y = 0$

解　将方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x} + y^4 \ln x$$

这是 $n = 4$ 的伯努利方程，令 $z = y^{-3}$，代入上式，化简得线性方程

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x}-3\ln x \tag{1}$$

线性齐次方程

$$\frac{dz}{dx}+\frac{z}{x}=0$$

的通解为

$$z=\frac{C}{x}$$

设 $z=\frac{C(x)}{x}$，代入线性方程(1)，得

$$C'(x)=-3x\ln x$$

两边积分得

$$C(x)=C-\frac{3}{2}x^2\ln x+\frac{3}{4}x^2$$

于是，线性方程(1)的通解为

$$z=\frac{1}{x}\left(C-\frac{3}{2}x^2\ln x+\frac{3}{4}x^2\right)$$

代回原变量，得原方程通解

$$y=\left(\frac{x}{C-\frac{3}{2}x^2\ln x+\frac{3}{4}x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

此外，$y=0$ 也是一解.

【92】 一容器内盛有 200 加仑的盐水，含盐 S_0 磅，设 $t=0$ 开始以 4 加仑/分的速度向容器内注入含盐 0.5 磅/加仑的盐水，经充分搅拌后又以同样的速度流出容器，试求任何时刻 $t>0$ 时容器内盐的浓度.

解 这是一个混合溶液的问题. 若以 $S(t)$表时刻 t 时容器内含盐的总量，由第一章习题 28，$S(t)$是微分方程初值问

题

$$\frac{dS}{dt}=2-\frac{S}{50},\qquad S(0)=S_0$$

的解.

容易求得解

$$S=S_0e^{-0.02t}+100(1-e^{-0.02t})$$

因此，容器内 t 时盐的浓度 $d(t)$ 为

$$d(t)=\frac{S(t)}{200}=\frac{S_0}{200}e^{-0.02t}+\frac{1}{2}(1-e^{-0.02t}).$$

【93】 已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求这曲线适合的方程.

解　设曲线的方程为 $y=y(x)$，过曲线上任一点 $p(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

所以在 y 轴上的截距为 $y-x\dfrac{dy}{dx}$，由题意，

$$y-x\frac{dy}{dx}=x$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1$$

这是线性方程，按常数变易法，可求得通解为

$$y=Cx-x\ln|x|.$$

【94】 设 $y_1(x),y_2(x)$ 是方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个不同的解，求证它的任何一个解满足恒等式

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=K\quad(K\text{ 为常数})$$

证 由通解公式知：任一解 $y=y(x)$可由公式

$$y(x) = e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] \tag{1}$$

表示，其中 C 为 $y(x)$对应的某常数. $y_1(x), y_2(x)$也应具有上述形式，设它们分别对应常数 C_1, C_2 且 $C_1 \neq C_2$，则由(1)式得

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(1)-y_1(x)} = \frac{C-C_1}{C_2-C_1} = K.$$

【95】 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，又 $a>0$，求证：方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = f(x)$$

的一切解 $y(x)$，均有 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \dfrac{b}{a}$.

证 由通解公式

$$y(x) = e^{-ax}\left[C + \int_0^x f(t)e^{at}\mathrm{d}t\right]$$

由洛比达法则

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{C+\int_0^x f(t)e^{at}\mathrm{d}t}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{ax}}{e^{ax}\cdot a}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a} = \frac{b}{a}.$$

【96】 设 $y(x)$在$[0,+\infty)$上连续可微，且有

$$\lim_{x\to+\infty}[y'(x)+y(x)]=0$$

试证：

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$$

证 令

$$y'(x)+y(x)=f(x) \tag{1}$$

由题意知 $f(x)$在$[0,+\infty)$连续，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 则由上题知 $a=1>0$，而 $y(x)$满足(1)，因而有

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=b=0.$$

【97】 当$-\infty<x<\infty$时，$f(x)$连续且$|f(x)|\leqslant M$. 证明：方程

$$y'+y=f(x) \tag{1}$$

在区间$-\infty<x<\infty$上存在一个有界解，求出这个解. 并证明：若函数 $f(x)$是以 ω 为周期的周期函数，则这个解也是以 ω 为周期的周期函数.

证　方程(1)的通解为

$$y=e^{-x}\left[C+\int_0^x f(t)e^t\mathrm{d}t\right] \tag{2}$$

1) 取 $C=\int_{-\infty}^0 e^t f(t)\mathrm{d}t$(由假设知，此广义积分收敛)，得解

$$y(x)=e^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)e^t\mathrm{d}t \tag{3}$$

则由 $x\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x)|\leqslant M$ 易证

$$|y(x)|\leqslant M \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

此即为(1)的一个有界解.

2) 若 $f(x)=f(x+\omega)$，对(1)中确定的解(3)，当 $x\in(-\infty,+\infty)$有

$$y(x+\omega)=e^{-(x+\omega)}\int_{-\infty}^{x+\omega}f(t)e^t\mathrm{d}t$$

令 $t=z+\omega$，则上式右端为

$$e^{-(x+\omega)}\int_{-\infty}^{x}e^{z+\omega}f(z+\omega)\mathrm{d}z$$

$$= e^{-x}e^{-\omega}\int_{-\infty}^{x} f(z)e^{z+\omega}\mathrm{d}z$$

$$= e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(z)e^{z}\mathrm{d}z$$

$$= y(x)$$

所以 $y(x)$也是以 ω 为周期的周期函数.

§2.4 黎卡提(Riccati)方程

提 要

定义 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{1}$$

的方程称为黎卡提方程，其中 $P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$是某个区间内的已知函数.

黎卡提方程在一般情况下不能用初等积分法求出它的通解. 如果知道它的一个特解，才可以用初等积分法求出它的通解. 设上述黎卡提方程的一个特解为 $y_1(x)$，作变换

$$y = z + y_1(x)$$

代入方程(1),化简得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = [2P(x)y_1(x) + Q(x)]z + P(x)z^2$$

这是一个伯努利方程，此方程可求出它的通解，再代入

$$y = z + y_1(x)$$

就得到黎卡提方程(1)的通解.

题 解

【98】 $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$

解　将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=y^2+\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2} \tag{1}$$

这是黎卡提方程，容易观察出 $y_1=-\frac{1}{x}$ 是它的一个解．于是作变换

$$y=z-\frac{1}{x}$$

代入方程(1)，得到

$$\frac{dz}{dx}=z^2-\frac{z}{x} \tag{2}$$

这是一个伯努利方程，它有解 $z=0$．当 $z\neq 0$ 时，再作变换

$$u=z^{-1}$$

代入方程(2)，即得

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}-1 \tag{3}$$

解线性方程(3)，得到

$$u=x(C-\ln|x|)$$

所以，原方程的解为 $y=-\frac{1}{x}$ 及 $y=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x(C-\ln|x|)}$.

【99】　$x^2(y'+y^2)+4xy+2=0$

解　将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=-y^2-\frac{4y}{x}-\frac{2}{x^2}$$

这是黎卡提方程，它有特解 $y_1=-\frac{2}{x}$. 作变换

$$y=z-\frac{2}{x}$$

代入方程，得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-z^2$$

两边积分得

$$\frac{1}{z}=x+C$$

此外，$z=0$ 也是一解.

代回原变量，原方程的解为

$$y=-\frac{2}{x}\quad 及\quad y=\frac{1}{x+C}-\frac{2}{x}.$$

【100】 $(x^2\ln x-1)y'=2xy^2-(2x\ln x-x)y-\frac{1}{x}$

解 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy^2-(2x\ln x-x)y-\frac{1}{x}}{x^2\ln x-1}\tag{1}$$

观察出 $y_1=\ln x$ 是它的一个解. 于是作变换

$$y=z+\ln x$$

代入方程(1)，得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{x^2\ln x-1}z^2+\frac{2x\ln x+x}{x^2\ln x-1}z\tag{2}$$

这是一个伯努利方程，它有解 $z=0$. 当 $z\neq0$ 时，再作变换

$$u=z^{-1}$$

代入方程(2)，即得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x\ln x+x}{x^2\ln x-1}u-\frac{2x}{x^2\ln x-1}\tag{3}$$

解线性方程(3)，得

$$u=e^{-\int\frac{2x\ln x+x}{x^2\ln x-1}\mathrm{d}x}\left[C-\int\frac{2x}{x^2\ln x-1}(x^2\ln x-1)\mathrm{d}x\right]$$

整理得

$$u=\frac{1}{x^2\ln x-1}(C-x^2)$$

代回原变量，得原方程的解为

$$y=\ln x \quad 及 \quad y=\ln x+\frac{x^2\ln x-1}{C-x^2}.$$

【101】　$y'=y^2-(1+x^2)y+2x$

解　这是黎卡提方程，观察出 $y_1=1+x^2$ 是它的一个解. 于是作变换

$$y=z+1+x^2$$

代入原方程，得到

$$\frac{dz}{dx}=z^2+(1+x^2)z \tag{1}$$

这是一个伯努利方程，再作变换

$$u=z^{-1}$$

代入上述方程(1)，即得

$$\frac{du}{dx}=-(1+x^2)u-1 \tag{2}$$

解线性方程(2)，得到

$$u=e^{-\int(1+x^2)dx}\left(C-\int e^{\int(1+x^2)dx}dx\right)$$

整理得

$$u=e^{-x-\frac{x^3}{3}}\left(C-\int e^{x+\frac{x^3}{3}}dx\right)$$

代回原变量，得原方程解为

$$y=1+x^2 \quad 及 \quad y=1+x^2+\frac{e^{x+\frac{x^3}{3}}}{C-\int e^{x+\frac{x^3}{x}}dx}.$$

【102】 $y'=\frac{f'(x)}{g(x)}y^2-\frac{g'(x)}{f(x)}$

解 这是黎卡提方程，观察出 $y_1=-\frac{g(x)}{f(x)}$是它的一个解.于是作变换

$$y=z-\frac{g(x)}{f(x)}$$

代入原方程，得到

$$\frac{dz}{dx}=\frac{f'(x)}{g(x)}z^2-2\frac{f'(x)}{f(x)}z$$

这是伯努利方程，再作变换

$$u=z^{-1}$$

代入方程，即得

$$\frac{du}{dx}=2\frac{f'(x)}{f(x)}u-\frac{f'(x)}{g(x)}$$

解此线性方程

$$u=e^{\int\frac{2f'(x)}{f(x)}dx}\left[C-\int\frac{f'(x)}{g(x)}\cdot\frac{1}{[f(x)]^2}dx\right]$$

化简得

$$u=[f(x)]^2\left[C-\int\frac{f'(x)}{g(x)f^2(x)}dx\right]$$

代回原变量，得原方程解为

$$y=-\frac{g(x)}{f(x)}$$

及

$$y=-\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{1}{f^2(x)}\left[C-\int\frac{f'(x)}{g(x)f^2(x)}dx\right]^{-1}.$$

§2.5　全微分方程与积分因子

提　要

定义 1　如果方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

的左端恰好是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，即

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y\equiv \mathrm{d}u(x,y)$$

则称方程(1)为全微分方程(又称恰当方程)，$u(x,y)$ 称为(1)的一个原函数.

［注］　对形如(1)的方程讨论中，x,y 处于平等地位，方程(1)确定的是广义线素场.

定理 1　设函数 $M(x,y),N(x,y)$ 在 xoy 平面上的单连通域 D 内连续可微，那么，方程(1)是全微分方程的充分必要条件是在 D 内恒成立

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{2}$$

当(2)成立时，函数

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\mathrm{d}y \tag{3}$$

或

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\mathrm{d}y \tag{4}$$

是(1)的原函数，其中 $(x_0,y_0)\in D$.

下面总假定方程(1)中的 $M(x,y),N(x,y)$ 在某单连通区域内连续可微.

全微分方程的求解方法

1　线积分法

因为(3)或(4)是方程(1)的原函数，方程(1)的通解为

$$u(x,y)=C.$$

2　不定积分法

利用关系式

$$\mathrm{d}u(x,y)=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$$

由此，函数 $u(x,y)$ 应适合方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y) \tag{5}$$

由(5)的第一个式子有

$$u(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y) \tag{6}$$

另一方面，$u(x,y)$ 满足(5)的第二式，即

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)=N(x,y)$$

由此确定 $\varphi'(y)$，再积分求出 $\varphi(y)$，把 $\varphi(y)$ 代入(6)，即得 $u(x,y)$，则 $u(x,y)=C$ 是方程(1)的通解.

3　观察法

先把那些本身已构成全微分的项分出，再把剩下的项凑成某函数的全微分. 这种方法有时非常简便，但它要求熟记一些二元函数的全微分公式.

定义 2　若存在可微函数 $\mu=\mu(x,y)$，使

$$\mu M(x,y)\mathrm{d}x+\mu N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{7}$$

是全微分方程，则称 $\mu(x,y)$ 为

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

的积分因子.

定理 2　$\mu(x,y)$是方程(1)的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

定理 3　若 $\mu(x,y)$是方程(1)的一个积分因子，且 $\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y=\mathrm{d}U$，则 $\mu\varphi(U)$也是方程(1)的积分因子. 其中 $\varphi(U)$是 U 的任一连续函数.

积分因子的求法

1　观察法

用观察法求积分因子的关键在于熟悉一些二元函数全微分公式，还需要一定的技巧.

2　公式法

若方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

中的 $M(x,y),N(x,y)$满足

1) $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x)$　(仅是 x 的函数)

则它有积分因子

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}.$$

2) $-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(y)$　(仅是 y 的函数)

则它有积分因子

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y}.$$

3) 分组求积分因子法

如果不易直接求得方程的积分因子，在这种情况下，宜把它的左端分成几组，比如分成两组：

$$(M_1\mathrm{d}x+N_1\mathrm{d}y)+(M_2\mathrm{d}x+N_2\mathrm{d}y)=0 \tag{8}$$

然后分别求得各组的积分因子 μ_1 和 μ_2，于是就可找到 u_1,u_2，使得

$$\mu_1M_1\mathrm{d}x+\mu_1N_1\mathrm{d}y=\mathrm{d}u_1$$

$$\mu_2M_2\mathrm{d}x+\mu_2N_2\mathrm{d}y=\mathrm{d}u_2$$

这时可适当选取函数 $\Phi_1(u_1),\Phi_2(u_2)$使得

$$\mu_1\Phi_1(u_1)=\mu_2\Phi_2(u_2)$$

就可求得方程(8)的积分因子为 $\mu_1\Phi_1(u_1)$.

题　解

【103】 $2xy\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=0$

解　因为 $M(x,y)=2xy$，$N(x,y)=(x^2-y^2)$，所以有

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

因此方程为全微分方程. 取 $x_0=0,y_0=0$，得

$$u(x,y)=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-y^2)\mathrm{d}y=x^2y-\frac{y^3}{3}$$

于是方程的通解为

$$x^2y-\frac{y^3}{3}=C.$$

【104】 $e^{-y}\mathrm{d}x-(2y+xe^{-y})\mathrm{d}y=0$

解　这里 $M(x,y)=e^{-y}$，$N(x,y)=-(2y+xe^{-y})$

于是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-e^{-y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

因此这是一个全微分方程. 取 $x_0=0$，$y_0=0$，得

$$u(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}x+\int_0^y-(2y+xe^{-y})\mathrm{d}y$$

$$= x - y^2 + xe^{-y} - x$$

于是，方程的通解为

$$xe^{-y} - y^2 = C.$$

【105】　$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx - \sqrt{x^2-y}\,dy = 0$

解　因为 $M(x,y) = 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)$，$N(x,y) = -\sqrt{x^2-y}$，所以有

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-y}} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

因此方程为全微分方程. 把方程重新分项组合，得到

$$2x dx + \left(2x\sqrt{x^2-y}\,dx - \sqrt{x^2-y}\,dy\right) = 0$$

即

$$dx^2 + d\left(\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\right) = 0$$

所以，方程的通解为

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} = C.$$

【106】　$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

解　这里 $M(x,y) = \frac{y}{x}$，$N(x,y) = y^3 + \ln x$，于是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

因此这是一个全微分方程. 把方程重新分项组合，得到

$$\left(\frac{y}{x}dx + \ln x dy\right) + y^3 dy = 0$$

即

$$d(y\ln x) + d\frac{y^4}{4} = 0$$

所以，方程的通解为

$$y\ln x+\frac{y^4}{4}=C.$$

【107】 $\frac{3x^2+y^2}{y^2}\mathrm{d}x-\frac{2x^3+5y}{y^3}\mathrm{d}y=0$

解 因为 $M(x,y)=\frac{3x^2+y^2}{y^2}$，$N(x,y)=\frac{2x^3+5y}{-y^3}$，所以有

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-\frac{6x^2}{y^3}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

因此方程为全微分方程. 将方程重新分项组合，得到

$$\left(\frac{3x^2}{y^2}\mathrm{d}x-\frac{2x^3}{y^3}\mathrm{d}y\right)+\mathrm{d}x-\frac{5}{y^2}\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{y^2}\right)+\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{5}{y}\right)=0$$

因此，方程的通解为

$$\frac{x^3}{y^2}+x+\frac{5}{y}=C.$$

【108】 $(1+y^2\sin 2x)\mathrm{d}x-y\cos 2x\mathrm{d}y=0$

解 这里 $M(x,y)=1+y^2\sin 2x$，$N(x,y)=-y\cos 2x$，于是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y\sin 2x=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

所以它是一个全微分方程. 将方程重新分项组合，得

$$\mathrm{d}x+(y^2\sin 2x\mathrm{d}x-y\cos 2x\mathrm{d}y)=0$$

即

$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(-\frac{y^2}{2}\cos 2x\right)=0$$

于是，方程的通解为

$$x-\frac{y^2}{2}\cos 2x=C.$$

【109】　$5x^4y\mathrm{d}x+(x^5\mathrm{d}y+x^3\mathrm{d}x)=0$

解　这里 $M(x,y)=5x^4y+x^3$，$N(x,y)=x^5$，因此

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=5x^4=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

这是一个全微分方程. 将方程重新分项组合，得到

$$(5x^4y\mathrm{d}x+x^5\mathrm{d}y)+x^3\mathrm{d}x=0$$

即

$$\mathrm{d}(x^5y)+\mathrm{d}\,\frac{x^4}{4}=0$$

所以，方程的通解为

$$x^5y+\frac{x^4}{4}=C.$$

【110】　$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$

解　这里 $M(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

$$N(x,y)=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\frac{x}{x^2+y^2}$$

于是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$=-xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

因此这是一个全微分方程. 即

$$\mathrm{d}\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)-\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=0$$

所以方程的通解为

$$\sqrt{1+x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}-C.$$

【111】　$(ye^{x}-e^{-y})\mathrm{d}x+(xe^{-y}+e^{x})\mathrm{d}y=0$

解　这里 $M(x,y)=ye^{x}-e^{-y}$，$N(x,y)=xe^{-y}+e^{x}$，函数 $u(x,y)$ 应适合方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ye^{x}-e^{-y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=xe^{-y}+e^{x}$$

由上面的第一式对 x 进行积分，得到

$$u(x,y)=\int(ye^{x}-e^{-y})\mathrm{d}x+\varphi(y)$$

$$=ye^{x}-xe^{-y}+\varphi(y)$$

两边关于 y 求导，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x}+xe^{-y}+\varphi'(y)$$

因此

$$e^{x}+xe^{-y}+\varphi'(y)=xe^{-y}+e^{x}$$

得到

$$\varphi'(y)=0$$

取 $\varphi(y)=0$，得原方程的原函数为

$$u(x,y)=ye^{x}-xe^{-y}$$

于是，方程的通解为

$$ye^{x}-xe^{-y}=C.$$

【112】　$(6xy^2+4x^3)\mathrm{d}x+3(2x^2y+y^2)\mathrm{d}y=0$

解　因为 $M(x,y)=6xy^2+4x^3$，

$$N(x,y)=3(2x^2y+y^2)$$

所以有

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=12xy=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

这是一个全微分方程. 将方程重新分项组合，得到

$$(6xy^2dx+6x^2ydy)+4x^3dx+3y^2dy=0$$

即

$$d(3x^2y^2+x^4+y^3)=0$$

因此，方程的通解为

$$3x^2y^2+x^4+y^3=C.$$

【113】 $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx$

$$+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0$$

解　这里 $M(x,y)=\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1$,

$$N(x,y)=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$$

易验证

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

这是一个全微分方程. 将方程重新分项组合，得到

$$\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}dx-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}dy\right)$$

$$-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}dy+dx+\frac{1}{y^2}dy=0$$

即

$$d\left(-\cos\frac{x}{y}\right)+d\left(\sin\frac{y}{x}\right)+dx-d\left(\frac{1}{y}\right)=0$$

所以，方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C.$$

【114】 $(9x^2+y-1)-(4y-x)y'=0$

解 将方程改写为

$$(9x^2+y-1)\mathrm{d}x-(4y-x)\mathrm{d}y=0$$

这里 $M(x,y)=9x^2+y-1$，$N(x,y)=x-4y$，于是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=1=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

这是全微分方程. 将方程重新分项组合，得到

$$9x^2\mathrm{d}x+(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-\mathrm{d}x-4y\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}(3x^3)+\mathrm{d}(xy)-\mathrm{d}x-\mathrm{d}(2y^2)=0$$

所以，方程的通解为

$$3x^3+xy-x-2y^2=C.$$

【115】 $(1+e^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$

解 这里 $M(x,y)=1+e^{\frac{x}{y}}$，$N(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)$，经计算知

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

这是一个全微分方程. 将方程重新分项组合，得到

$$\mathrm{d}x+\left(e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}x+e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y\right)=0$$

即

$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}(ye^{\frac{x}{y}})=0$$

所以，方程的通解为

$$x+ye^{\frac{x}{y}}=C.$$

【116】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+1}{x+y^2+3}$

解 将方程改写为

$$(x-y+1)\mathrm{d}x-(x+y^2+3)\mathrm{d}y=0$$

这里 $M(x,y)=x-y+1$，$N(x,y)=-(x+y^2+3)$，所以

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-1$$

这是一个全微分方程. 取 $x_0=0$，$y_0=0$，得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x M(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_0^y N(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x (x+1)\mathrm{d}x+\int_0^y -(x+y^2+3)\mathrm{d}y\\&=\frac{x^2}{2}+x-xy-\frac{y^3}{3}-3y\end{aligned}$$

于是方程的通解为

$$\frac{x^2}{2}+x-xy-\frac{y^3}{3}-3y=C.$$

【117】 $(e^x\sin y-2y\sin x)\mathrm{d}x+(e^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=0$

解 这里 $M(x,y)=e^x\sin y-2y\sin x$,

$$N(x,y)=e^x\cos y+2\cos x$$

由于

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^x\cos y-2\sin x$$

这是全微分方程，将方程重新分项组合，得到

$$(e^x\sin y\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y)+(2\cos x\mathrm{d}y-2y\sin x\mathrm{d}x)=0$$

即

$$\mathrm{d}(e^x\sin y)+\mathrm{d}(2y\cos x)=0$$

所以，方程的通解为

$$e^x\sin y+2y\cos x=C.$$

【118】 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$

解 这里$M(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，

$$N(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$$

经计算知

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{y^2}$$

这是一个全微分方程．把方程重新分项组合，得到

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)+\frac{dx}{x}+\left(\frac{dx}{y}-\frac{x}{y^2}dy\right)+\frac{dy}{y}=0$$

即

$$d(\sqrt{x^2+y^2})+d(\ln|x|)+d\left(\frac{x}{y}\right)+d(\ln|y|)=0$$

所以，方程的通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}=C.$$

【119】 $\left(3x^2\tan y-\dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2 y+4y^3+\dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy=0$

解 这里 $M(x,y)=3x^2\tan y-\dfrac{2y^3}{x^3}$，

$$N(x,y)=x^3\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}$$

经计算知

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=3x^2\sec^2 y-\frac{6y^2}{x^3}$$

因此这是一个全微分方程．把方程重新分项组合，得到

$$(3x^2\tan y\mathrm{d}x+x^3\sec^2 y\mathrm{d}y)-\left(\frac{2y^3}{x^3}\mathrm{d}x-\frac{3y^2}{x^2}\mathrm{d}y\right)+4y^3\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}(x^3\tan y)+\mathrm{d}\left(\frac{y^3}{x^2}\right)+\mathrm{d}(y^4)=0$$

所以，方程的通解为

$$x^3\tan y+\frac{y^3}{x^2}+y^4=C.$$

题目 120～127 中的积分因子仅与 x 有关

【120】 $(x^4+y^4)\mathrm{d}x-xy^3\mathrm{d}y=0$

解　$M(x,y)=x^4+y^4$，$N(x,y)=-xy^3$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y^3,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-y^3$$

所以

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4y^3+y^3}{-xy^3}=\frac{5}{-x}$$

这样，方程有积分因子

$$\mu(x)=e^{\int\frac{5}{-x}\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^5}$$

原方程两端乘以$\frac{1}{x^5}$，得到全微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{y^4}{x^5}\mathrm{d}x-\frac{y^3}{x^4}\mathrm{d}y=0$$

即
$$d(\ln|x|)-d\left(\frac{y^4}{4x^4}\right)=0$$

因而方程的通解为

$$\ln|x|-\frac{y^4}{4x^4}=C.$$

【121】 $(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)dx$
$+2(y^3+x^2y+x)dy=0$

解 $M(x,y)=2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y$,
$N(x,y)=2(y^3+x^2y+x)$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3y+4x^2+4xy+4xy^3+2,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=4xy+2$$

所以

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4x(x^2y+x+y^3)}{2(y^3+x^2y+x)}=2x$$

因此，积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int 2x dx}=e^{x^2}$$

用 e^{x^2}乘 原方程两端，得

$$e^{x^2}(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)dx+2e^{x^2}(y^3+x^2y+x)dy=0$$

即

$$d\left(x^2y^2+2xy+\frac{1}{2}y^4\right)e^{x^2}=0$$

因而方程的通解为

$$\left(x^2y^2+2xy+\frac{1}{2}y^4\right)e^{x^2}=C.$$

【122】 $e^y dx-x(2xy+e^y)dy=0$

解　$M(x,y)=e^y$，$N(x,y)=-x(2xy+e^y)$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^y,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-4xy-e^y$$

所以

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2(e^y+2xy)}{-x(2xy+e^y)}=-\frac{2}{x}$$

得到积分因子

$$\mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2}$$

用$\dfrac{1}{x^2}$乘原方程两端，得

$$\frac{e^y}{x^2}\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y-\frac{e^y}{x}\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}\left(-\frac{e^y}{x}\right)-\mathrm{d}y^2=0$$

于是，原方程的通解为

$$\frac{e^y}{x}+y^2=C.$$

【123】　$(e^x+3y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$

解　$M(x,y)=e^x+3y^2$，$N(x,y)=2xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6y,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2y$$

所以

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{6y-2y}{2xy}=\frac{2}{x}$$

方程有积分因子

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

用 x^2 乘原方程两端，得

$$x^2(e^x + 3y^2)dx + 2x^3ydy = 0$$

即

$$d[(x^2 - 2x + 2)e^x] + d(x^3y^2) = 0$$

因而方程的通解为

$$(x^2 - 2x + 2)e^x + x^3y^2 = C.$$

【124】 $(y - 1 - xy)dx + xdy = 0$

解 $M(x, y) = y - 1 - xy$，$N(x, y) = x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 - x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

所以

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x}{x} = -1$$

这样，方程的积分因子为

$$\mu(x) = e^{\int -1dx} = e^{-x}$$

用 e^{-x} 乘原方程两端，得到

$$e^{-x}(y - 1 - xy)dx + xe^{-x}dy = 0$$

即

$$-e^{-x}dx + (e^{-x}ydx - xye^{-x}dx) + xe^{-x}dy = 0$$

得到

$$d(e^{-x}) + d(xye^{-x}) = 0$$

所以

$$1 + xy = Ce^x.$$

【125】 $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

解　$M(x,y)=3x^2y+2xy+y^3$，$N(x,y)=x^2+y^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2x+3y^2,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

有

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{3(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=3$$

方程的积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int 3\mathrm{d}x}=e^{3x}$$

用 e^{3x}乘原方程两端，得

$$e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)\mathrm{d}x+e^{3x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$$

这是全微分方程，即

$$\frac{1}{3}\mathrm{d}[(3x^2y+y^3)e^{3x}]=0$$

因而，原方程的通解为

$$(3x^2y+y^3)e^{3x}=C.$$

【126】　$(x+\sin x+\sin y)\mathrm{d}x+\cos y\mathrm{d}y=0$

解　$M(x,y)=x+\sin x+\sin y$，$N(x,y)=\cos y$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos y,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=0$$

于是

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{\cos y}{\cos y}=1$$

因此积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int \mathrm{d}x}=e^{x}$$

用 e^{x} 乘原方程两端，得到

$$e^x(x+\sin x+\sin y)\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y=0$$

即

$$xe^x\mathrm{d}x+e^x\sin x\mathrm{d}x+(e^x\sin y\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y)=0$$

于是，方程的通解为

$$e^x(x-1)+\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+e^x\sin y=C.$$

【127】 $(2x^2y+2y+5)\mathrm{d}x+(2x^3+2x)\mathrm{d}y=0$

解 将方程写为

$$[2y(1+x^2)+5]\mathrm{d}x+2x(1+x^2)\mathrm{d}y=0$$

由此，容易观察出 $\mu=\dfrac{1}{1+x^2}$ 是一个积分因子，用 μ 乘微分方程两端，得到

$$2y\mathrm{d}x+\frac{5}{1+x^2}\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}(2xy+5\arctan x)=0$$

所以，原方程的通解为

$$2xy+5\arctan x=C.$$

题目 128～133 中的积分因子仅与 y 有关

【128】 $(2xy^4e^y+2xy^3+y)\mathrm{d}x+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)\mathrm{d}y=0$

解 $M=2xy^4e^y+2xy^3+y$，$N=x^2y^4e^y-x^2y^2-3x$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2xy^4e^y-2xy^2-3$$

所以

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{4(2xy^3e^y+2xy^2+1)}{-y(2xy^3e^y+2xy^2+1)}=\frac{4}{-y}$$

方程的积分因子为

$$\mu(y)=e^{\int\frac{4}{-y}dy}=\frac{1}{y^4}$$

于是原方程可化为

$$\left(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dx+\left(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4}\right)dy=0$$

将原方程重新分项组合，得

$$(2xe^y dx+x^2e^y dy)+\left(\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy\right)+\left(\frac{1}{y^3}dx-\frac{3x}{y^4}dy\right)=0$$

即

$$d\left(x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}\right)=0$$

因此，方程的通解为

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=C$$

另外，$y=0$ 亦是方程的解.

【129】 $(2xy^2-y)dx+(y^2+y+x)dy=0$

解 $M(x,y)=2xy^2-y$，$N(x,y)=y^2+y+x$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy-1,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=1$$

于是得到

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{2(2xy-1)}{-y(2xy-1)}=-\frac{2}{y}$$

所以，方程有积分因子

$$\mu(y)=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=\frac{1}{y^2}$$

于是原方程可化为

$$\left(2x-\frac{1}{y}\right)dx+\left(1+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\right)dy=0$$

即

$$d(x^2)-d\left(\frac{x}{y}\right)+dy+d(\ln|y|)=0$$

因而，方程的通解为

$$x^2-\frac{x}{y}+y+\ln|y|=C$$

此外，$y=0$ 也是方程的一解.

【130】 $(y\cos x-x\sin x)dx+(y\sin x+x\cos x)dy=0$

解 $M=y\cos x-x\sin x$，$N=y\sin x+x\cos x$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=y\cos x+\cos x-x\sin x$$

得到

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{x\sin x-y\cos x}{x\sin x-y\cos x}=1$$

方程有积分因子

$$\mu(y)=e^{\int dy}=e^y$$

用 e^y 乘方程两端，得

$$e^y(y\cos x-x\sin x)dx+e^y(y\sin x+x\cos x)dy=0$$

这是全微分方程，它的通解为

$$x\cos xe^y+(y-1)\sin xe^y=C.$$

【131】 $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$

解 这是齐次方程，可求出它的积分因子为

$$\mu(y)=\frac{1}{x^3y+y(-x^3-y^3)}=-\frac{1}{y^4}$$

于是，原方程可化为

$$\left(-\frac{x^2}{y^3}dx+\frac{x^3}{y^4}dy\right)+\frac{1}{y}dy=0$$

即

$$d\left(-\frac{x^3}{3y^3}\right)+d(\ln|y|)=0$$

因而方程的通解为

$$\ln|y|-\frac{x^3}{3y^3}=C.$$

此外，$y=0$ 也是方程的解.

【132】 $2xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$

解 $M(x,y)=2xy^3$，$N(x,y)=x^2y^2-1$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6xy^2,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2$$

于是

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{4xy^2}{-2xy^3}=-\frac{2}{y}$$

方程的积分因子为

$$\mu(y)=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=\frac{1}{y^2}\quad(y\neq 0)$$

用积分因子$\frac{1}{y^2}$乘方程两端，得到

$$2xydx+x^2dy-\frac{1}{y^2}dy=0$$

即

$$d(x^2y)+d\left(\frac{1}{y}\right)=0$$

因而，方程的通解为

$$x^2y+\frac{1}{y}=C$$

此外，$y=0$ 也是方程的一个特解.

【133】 $e^x\mathrm{d}x+(e^x\cot y+2y\cos y)\mathrm{d}y=0$

解 $M(x,y)=e^x$，$N(x,y)=e^x\cot y+2y\cos y$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=e^x\cot y$$

得到

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{-e^x\cot y}{-e^x}=\cot y$$

方程有积分因子

$$\mu(y)=e^{\int\cot y\mathrm{d}y}=\sin y$$

用 $\sin y$ 乘方程两端得到

$$(e^x\sin y\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y)+y\sin 2y\mathrm{d}y=0$$

这是一个全微分方程，即

$$\mathrm{d}(e^x\sin y)+\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}y\cos 2y+\frac{1}{4}\sin 2y\right)=0$$

因而方程的通解为

$$e^x\sin y-\frac{1}{2}y\cos 2y+\frac{1}{4}\sin 2y=C.$$

题目 134～139 中的积分因子与 x,y 都有关

【134】 $(5xy-3y^3)\mathrm{d}x+(3x^2-7xy^2)\mathrm{d}y=0$

解 重新组合为

$$(5xy\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{d}y)-(3y^3\mathrm{d}x+7xy^2\mathrm{d}y)=0$$

对第一个括号，可取 $\mu=\dfrac{1}{x^2y}$，乘上它得

$$\frac{5}{x}dx+\frac{3}{y}dy=d[\ln(x^5y^3)]$$

因此可取第一个括号的积分因子通式为$\frac{1}{x^2y}\Phi_1(x^5y^3)$，同理第二个括号乘以 $\mu_2=\frac{1}{xy^3}$，得$\frac{3}{x}dx+\frac{7}{y}dy=d[\ln(x^3y^7)]$，从而可取积分因子通式为$\frac{1}{xy^3}\Phi_2(x^3y^7)$，试求 Φ_1,Φ_2 使

$$\frac{1}{x^2y}\Phi_1(x^5y^3)=\frac{1}{xy^3}\Phi_2(x^3y^7)$$

设 $\Phi_1(u)=u^\alpha,\Phi_2(v)=v^\beta$，即有

$$\frac{1}{x^2y}x^{5\alpha}y^{3\alpha}=\frac{1}{xy^3}x^{3\beta}y^{7\beta}$$

得到

$$\begin{cases}5\alpha-2=3\beta-1\\3\alpha-1=7\beta-3\end{cases}$$

解此方程组，得 $\alpha=\frac{1}{2},\beta=\frac{1}{2}$，于是得到原方程的积分因子为

$$\mu=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

以 $\mu=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$乘原方程的两端，得到

$$(5x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}dx+3x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}}dy)-(3y^{\frac{7}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx+7x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}dy)=0$$

这是全微分方程，即

$$d(2x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}})-d(2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{7}{2}})=0$$

于是，方程的通解为

$$x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{7}{2}}=C.$$

【135】 $\left(3x+\frac{6}{y}\right)dx+\left(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x}\right)dy=0$

解　观察出方程有一个积分因子为

$$\mu = xy$$

用 xy 乘方程两端，得到

$$(3x^2y+6x)dx+(x^3+3y^2)dy=0$$

即

$$(3x^2ydx+x^3dy)+6xdx+3y^2dy=0$$

得到

$$d(x^3y)+d(3x^2)+d(y^3)=0$$

于是方程的通解为

$$x^3y+3x^2+y^3=C.$$

【136】 $ydx-(x^2+y^2+x)dy=0$

解 把方程重新组合为

$$ydx-xdy-(x^2+y^2)dy=0$$

容易观察出一个积分因子为

$$\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$$

于是把方程化为

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}-dy=0$$

即

$$d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)-dy=0$$

因而方程的通解为

$$\arctan\frac{x}{y}-y=C.$$

【137】 $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$

解 将方程改写为

$$2x^2dy-(2xy^2dy-y^3dx)=0$$

容易看出第一项有积分因子通式$\frac{1}{x^2}\Phi_1(y)$，考虑第二项构成的方程

$$2xy^2\mathrm{d}y-y^3\mathrm{d}x=0$$

取 $\mu=\frac{1}{x^2y}$，乘上式两端得

$$\frac{2y}{x}\mathrm{d}y-\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x=0.$$

即
$$\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{x}\right)=0$$

因此取前面通式中的 $\Phi_1(y)=y^{-1}$，即

$$\frac{1}{x^2}\Phi_1(y)=\frac{1}{x^2y}=\mu$$

就是原方程两项公共的积分因子，即

$$\frac{1}{x^2y}[2x^2\mathrm{d}y-(2xy^2\mathrm{d}y-y^3\mathrm{d}x)]=0$$

或
$$\frac{2}{y}\mathrm{d}y-\frac{2y}{x}\mathrm{d}y+\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x=0$$

这是全微分方程，易求得方程的通解为

$$2\ln|y|-\frac{y^2}{x}=C.$$

【138】 $y\mathrm{d}x+(x-3x^3y^2)\mathrm{d}y=0$

解 将方程改写为

$$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-3x^3y^2\mathrm{d}y=0$$

即
$$\mathrm{d}(xy)-3x^3y^2\mathrm{d}y=0$$

第一项可以有积分因子$\frac{1}{(xy)^m}$，考虑到第二项的形式，可取 $m=3$，即取 $\mu=\frac{1}{x^3y^3}$，乘以方程两端得

$$\frac{\mathrm{d}xy}{(xy)^3}-\frac{3}{y}\mathrm{d}y=0$$

或
$$\mathrm{d}\left[\frac{-1}{2(xy)^2}-3\ln|y|\right]=0$$

故原方程通解为

$$\frac{1}{2x^2y^2}+3\ln|y|=C.$$

【139】 $(y+x^3y+2x^2)\mathrm{d}x+(x+4xy^4+8y^3)\mathrm{d}y=0$

解 将方程重新组合改写为

$$(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+[(x^3y+2x^2)\mathrm{d}x+(4xy^4+8y^3)\mathrm{d}y]=0$$

第一个括号是全微分 $\mathrm{d}(xy)$，因此它的积分因子通式是 $1\cdot\Phi(xy)=\Phi(xy)$，我们希望它也是中括号中那部分的积分因子，令 $M(x,y)=x^3y+2x^2,N=4xy^4+8y^3$，则应满足条件

$$\frac{\partial(\Phi(xy)M(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\Phi(xy)N(x,y))}{\partial x}$$

即 $[(4xy^4+8y^3)y-(x^3y+2x^2)x]\Phi'=(x^3-4y^4)\Phi$

整理得

$$(4y^4-x^3)(xy+2)\Phi'=(x^3-4x^4)\Phi$$

所以

$$\Phi'=-\frac{1}{xy+2}\Phi$$

则求得

$$\Phi=e^{-\int\frac{\mathrm{d}(xy)}{xy+2}}=e^{-\ln|xy+2|}=\frac{1}{xy+2}$$

以$\frac{1}{xy+2}$乘原方程，得到

$$\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{xy+2}+x^2\mathrm{d}x+4y^3\mathrm{d}y=0$$

得到方程的通解为

$$x^3+3y^4+3\ln(xy+2)=C.$$

【140】 设函数 $f(u),g(u)$连续可微，且 $f(u)\neq g(u)$，试证方程

$$yf(xy)\mathrm{d}x+xg(xy)\mathrm{d}y=0$$

有积分因子

$$\mu=[xy(f(xy)-g(xy))]^{-1}$$

证 用 μ 乘方程两端，得

$$\frac{f(xy)}{x[f(xy)-g(xy)]}\mathrm{d}x+\frac{g(xy)}{y[f(xy)-g(xy)]}\mathrm{d}y=0 \qquad (1)$$

因为

$$M(x,y)=\frac{f(xy)}{x[f(xy)-g(xy)]},$$

$$N(x,y)=\frac{g(xy)}{y[f(xy)-g(xy)]}.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{x}\frac{f'(xy)x[f(xy)-g(xy)]-f(xy)x[f'(xy)-g'(xy)]}{[f(xy)-g(xy)]^2}$$

$$=\frac{-f'(xy)g(xy)+f(xy)g'(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2}$$

所以(1)是全微分方程.

【141】 证明方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 具有形如 $\mu=\mu[\varphi(x,y)]$的积分因子的充要条件为

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}=f[\varphi(x,y)]$$

并求出这个积分因子.

证 方程有积分因子 $\mu(x,y)$的充要条件是

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

令 $\mu=\mu[\varphi(x,y)]$，则有

$$N\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu[\varphi(x,y)]$$

即 $\mu=\mu[\varphi(x,y)]$满足下列微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\varphi}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}\mu[\varphi(x,y)] \qquad (1)$$

上式右端应为 $\varphi(x,y)$的函数，这就证明了 $\mu=\mu[\varphi(x,y)]$为方程的积分因子的充要条件为

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}=f(\varphi(x,y))$$

求解(1)式得

$$\mu[\varphi(x,y)]=e^{\int f(\varphi(x,y))\mathrm{d}\varphi}.$$

【142】 试导出方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

分别具有形如 $\mu(x+y),\mu(xy),\mu(x^2-y^2)$的积分因子的充要条件.

证 由上题结果知：具有 $\mu(x+y)$的积分因子的充要条件为

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(N-M)^{-1}=f(x+y)$$

具有形如 $\mu(xy),\mu(x^2-y^2)$的积分因子的充要条件为

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(Ny-Mx)^{-1}=f(xy)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(2xN+2yM)^{-1}=f(x^2-y^2).$$

【143】 试求伯努利方程的积分因子.

解 伯努利方程为

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

改写成

$$dy-p(x)ydx-q(x)y^n dx=0$$

乘以 y^{-n} 得

$$y^{-n}dy-p(x)y^{1-n}dx-q(x)dx=0$$

即

$$d(y^{1-n})-(1-n)p(x)y^{1-n}dx-(1-n)q(x)dx=0$$

再乘以 $e^{-(1-n)\int p(x)dx}$ 得

$$e^{-(1-n)\int p(x)dx}[d(y^{1-n})-(1-n)p(x)y^{1-n}dx]$$
$$-e^{-(1-n)\int p(x)dx}(1-n)q(x)dx=0$$

即

$$d[y^{1-n}e^{-(1-n)\int p(x)dx}]$$
$$-d\left[\int(1-n)q(x)e^{-(1-n)\int p(x)dx}dx\right]=0$$

这是全微分方程，因此所求的积分因子是

$$y^{-n}e^{-(1-n)\int p(x)dx}.$$

§2.6　一阶隐式微分方程

提　　要

定义 1　未按导数解出的一阶微分方程，它的一般形式为

$$F(x,y,y')=0 \tag{1}$$

我们将这类方程称为一阶隐式微分方程.

一阶隐式微分方程的求解方法

1　如果能从隐式方程中直接解出导数 y'，就得到 m 个一阶显式方程，形式为

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

求解这些已按导数解出的方程，就求得了原隐式方程的全部解.

2　如果未知函数的导数 y' 无法解出，或求解相当复杂，这时可采用引进参数的办法，这里介绍以下四种类型.

1）当隐式方程能对 y 解出时，如

$$y = f(x, y') \tag{2}$$

引进参数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$，则上式变为

$$y = f(x, p) \tag{3}$$

两边关于 x 求导，并以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ 代入，得到

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

这是关于 x、p 的已按导数解出的一阶微分方程，求得(4)的通解形式为

$$p = \varphi(x, C) \quad 或 \quad x = \psi(p, C) \tag{5}$$

代入 y 的表达式(3)，得到隐式方程(2)的通解

$$y = f(x, \varphi(x, C))$$

或参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \psi(p, C) \\ y = f(\psi(p, C), p) \end{cases}$$

其中 p 为参数，C 是任意常数.

2）当隐式方程能对 x 解出时，如

$$x=f(y,y') \tag{6}$$

引进参数$\dfrac{dy}{dx}=p$，则上式变为

$$x=f(y,p)$$

两端关于 y 求导，并以$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{p}$代入，得

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy} \tag{7}$$

这是关于 y,p 的已按导数解出的一阶微分方程，求出(7)的通解形式为

$$p=\varphi(y,C) \quad 或 \quad y=\psi(p,C)$$

则得到隐式方程(6)的通解为

$$x=f(y,\varphi(y,C))$$

或参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=f(\psi(p,C),p) \\ y=\psi(p,C) \end{cases}$$

其中 p 为参数，C 为任意常数.

3）当隐式方程不显含 y 时，如

$$F(x,p)=0 \qquad \left(p=\frac{dy}{dx}\right) \tag{8}$$

设它有参数表示

$$x=\varphi(t), \qquad p=\psi(t)$$

把它代入关系式

$$dy=p\,dx$$

即得

$$dy=\psi(t)\varphi'(t)dt$$

两边积分得到

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t + C$$

于是得到隐式方程(8)的通解为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t + C \end{cases}.$$

4）当隐式方程不显含 x 时，如

$$F(y, y') = 0 \tag{9}$$

记$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$，引入参数 t，将方程表示为适当的参数形式

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ p = \psi(t) \end{cases}$$

由关系式

$$\mathrm{d}y = p \cdot \mathrm{d}x$$

得

$$\varphi'(t)\mathrm{d}t = \psi(t)\mathrm{d}x$$

于是

$$\mathrm{d}x = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t$$

两边积分得

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t + C$$

因此，方程(9)参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t + C \\ y = \varphi(t) \end{cases}.$$

定义 2 形如

$$y = xp + f(p) \tag{10}$$

的方程，称为克莱罗方程. 这里 $p=\frac{dy}{dx}$，$f(p)$是已知的可微函数.

克莱罗方程的解法

对方程(10)两边关于 x 求导，得到

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

即
$$\frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0$$

由$\frac{dp}{dx}=0$，得 $p=C$，将它代入(10)，得方程的通解

$$y = xC + f(C)$$

这就是说，以任意常数 C 代替克莱罗方程中之 p，便得到克莱罗方程的通解.

由 $x+f'(p)=0$，得 $x=-f'(p)$，这样，便得到以 p 为参数的参数形式的特解

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

包络与奇解

对某些一阶显式方程及一阶隐式方程，存在一个特殊的解 $y=\varphi(x)$，积分曲线 $y=\varphi(x)$上的每一点$(x,\varphi(x))$破坏解的惟一性. 这个特殊的解称为方程的奇解. 显然，一个微分方程的积分曲线族的包络一定是奇解. 反之，一个微分方程若存在奇解，它也是该方程的通解所表示积分曲线族的包络.

奇解的求法

1) C 判别曲线法

设 $\Phi(x,y,C)=0$ 是一阶微分方程的通积分，则从联立方程组

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)=0\\ \Phi'_C(x,y,C)=0\end{cases}$$

消去 C 而得的 $\varphi(x,y)=0$ 中，再检验是否是积分曲线族的包络，若是包络的话，那么它就是方程的奇解.

2）p 判别曲线法

如果方程 $F(x,y,y')=0$ 有奇解的话，它必包含在从

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0\\ \dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0\end{cases}\qquad\left(p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

消去 p 而得到的 p 判别曲线中，再进一步检验 p 判别曲线是否是奇解.

题　　解

求解下列方程

【144】 $(y')^2=4y^3(1-y)$

解 将原方程两边开方,得

$$y'=\pm 2y^2\sqrt{\frac{1}{y}-1}$$

当 $y\neq0, y\neq1$ 时，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y^2\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}}=\pm\,\mathrm{d}x$$

两边积分，得

$$\sqrt{\frac{1}{y}-1}=\mp x+C$$

两边平方，整理得通解

$$y=\frac{1}{1+(\mp x+C)^2}.$$

此外，$y=0,y=1$ 也是方程的解.

【145】 $y=(y'-1)e^{y'}$

解 令$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，原方程写为

$$y=(p-1)e^p \tag{1}$$

两边关于 x 求导，得到

$$p=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}e^p+(p-1)e^p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

化简后得到

$$p\left(e^p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-1\right)=0$$

由此，得到

$$p=0 \quad 或 \quad e^p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=1$$

由方程 $e^p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=1$，解得 $e^p=x+C$，代入得到原方程的以 p 为参数的参数形式通解

$$\begin{cases}x=e^p-C\\ y=(p-1)e^p\end{cases}$$

把 $p=0$ 代入 y 的表达式(1)，得原方程的一个特解为

$$y=-1.$$

【146】 $y=2xy'+\frac{x^2}{2}+(y')^2$

解 令$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，原方程写为

$$y=2xp+\frac{x^2}{2}+p^2 \tag{1}$$

两边关于 x 求导，得到

$$p=2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+2p+x+2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

化简后得到

$$(p+x)\left(2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+1\right)=0$$

由此，得到

$$p=-x \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}$$

将 $p=-x$ 代入(1)，得原方程的一个特解为

$$y=-\frac{x^2}{2}$$

由方程$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}$，解得 $p=-\frac{1}{2}x+C$，代入(1)，得到原方程的通解为

$$y=-\frac{x^2}{4}+xC+C^2.$$

【147】 $y=xy'\ln x+(xy')^2$

解 设$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，原方程写为

$$y=xp\ln x+(xp)^2 \tag{1}$$

两边关于 x 求导，得到

$$p=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}x\ln x+p\ln x+p+2xp^2+2px^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

化简后得到

$$(\ln x+2xp)\left(x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p\right)=0$$

由此得到

$$p=\frac{\ln x}{-2x}\quad 或\quad x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-p.$$

把 $p=\frac{\ln x}{-2x}$代入(1)，得原方程的一个特解

$$y=-\frac{1}{4}(\ln x)^2$$

由方程 $x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-p$，解得 $p=\frac{C}{x}$，代入(1)，得到原方程的通解

$$y=C\ln x+C^2.$$

【148】 $y=x\left[y'+\sqrt{1+(y')^2}\right]$

解　令 $y'=p$，原方程写为

$$y=x\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) \tag{1}$$

两边关于 x 求导，得到

$$p=p+\sqrt{1+p^2}+x\left(1+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

整理得

$$\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{1+p^2}\mathrm{d}p=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\left(1+p^2+p\sqrt{1+p^2}\right)x=C$$

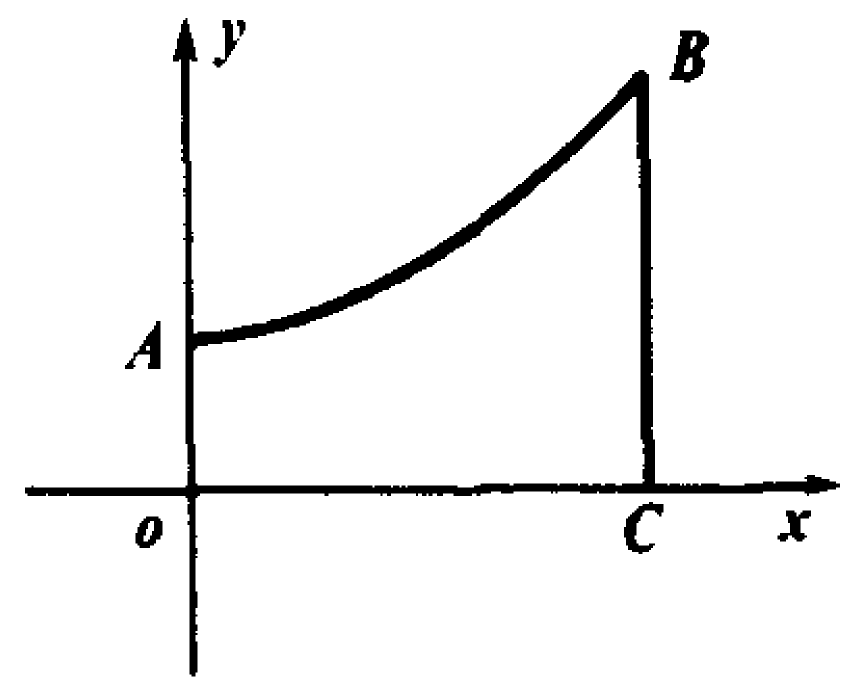
由此得到原方程以 p 为参数的参数形式的通解

$$\begin{cases}y=x\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\\ \left(1+p^2+p\sqrt{1+p^2}\right)x=C\end{cases}$$

或消去参数 p 得通解

$$y^2+(x-C)^2=C^2.$$

【149】 如图所示．若曲边梯形 $OABC$ 的面积的数值和弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度成正比(比例系数为 k)，求曲线 AB 的方程．



(第 149 题图)

解 设曲线 AB 的方程为 $y=y(x)$，则由面积及弧长的表示法，本题的正比关系可表为

$$\int_0^x y(x)\mathrm{d}x = k\int_0^x \sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x$$

两边对 x 求导，得微分方程

$$y=k\sqrt{1+(y')^2}$$

令 $y'=p$，得 $y=k\sqrt{1+p^2}$，代入 $\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\mathrm{d}y$ 得

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\left(k\frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\frac{k\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}$$

积分得

$$x=k\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|+C$$

因此，曲线 AB 的参数表示式是

$$\begin{cases} x=k\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|+C \\ y=k\sqrt{1+p^2}. \end{cases}$$

【150】 $y'(x-\ln y')=1$

解 将方程改写为 $x=\ln y'+\frac{1}{y'}$，并令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，得

$$x=\ln p+\frac{1}{p}$$

两边关于 y 求导，得到

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

经整理得

$$1=\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

即

$$\frac{p-1}{p}\mathrm{d}p=\mathrm{d}y$$

两边积分得

$$p-\ln|p|=y+C$$

因此，原方程参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\ln p+\dfrac{1}{p}\\ y=p-\ln|p|-C.\end{cases}$$

【151】　$2xyy'=(y')^3+4y^2$

解　解出 x，并令$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，得

$$x=\frac{p^2}{2y}+\frac{2y}{p} \tag{1}$$

两边关于 y 求导，得到

$$\frac{1}{p}=\left(\frac{p}{y}-\frac{2y}{p^2}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{p}-\frac{p^2}{2y^2}$$

整理得

$$(p^3-2y^2)\left(\frac{1}{yp^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{2y^2p}\right)=0$$

由此，得

$$p=(2y^2)^{\frac{1}{3}}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p}{2y}$$

由 $p=(2y^2)^{\frac{1}{3}}$，代入 x 的表达式(1)，得原方程的一个解为

$$y=\frac{2}{27}x^3$$

由$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p}{2y}$，可解得 $p=C\sqrt{y}$，代入(1)，得到原方程的通解

$$y=\frac{C^2}{4}\left(x-\frac{C^2}{2}\right)^2.$$

【152】 $(y')^2-2xy'+1=0$

解 解出 x，并令$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$,得

$$x=\frac{p}{2}+\frac{1}{2p}$$

两边关于 y 求导，得到

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{2p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

整理得

$$\frac{p^2-1}{2p}\mathrm{d}p=\mathrm{d}y$$

两边积分，得

$$\frac{p^2}{4}-\frac{1}{2}\ln|p|=y+C$$

因而，得到原方程参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{2p} & (p\neq 0)\\[2mm] y=\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{1}{2}\ln|p|-C.\end{cases}$$

【153】 $p^4=4y(xp-2y)^2 \quad (p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$

解 原方程两边开方，得

$$p^2 = \pm 2\sqrt{y}(xp - 2y)$$

对 x 解出得

$$x = \frac{2y}{p} \pm \frac{p}{2\sqrt{y}}$$

两边关于 y 求导得

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{p} - \frac{2y}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \pm \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \mp \frac{p}{4}y^{-\frac{3}{2}}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y} = \frac{\mathrm{d}p}{p}$$

两边积分得

$$y = Cp^2$$

因而原方程通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y}{p} \pm \dfrac{p}{2\sqrt{y}} \\ y = Cp^2. \end{cases}$$

【154】　$y' = e^{\frac{x}{y}y'}$

解　对 x 解出，并令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$，得

$$x = \frac{y\ln p}{p} \tag{1}$$

两边关于 y 求导得

$$\frac{1}{p} = \frac{\ln p}{p} - \frac{y\ln p}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + \frac{y}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

整理得

$$(1 - \ln p)\left(\frac{y}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{p}\right) = 0$$

于是有

$$\ln p=1 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p}{y}$$

由 $\ln p=1$ 解得 $p=e$，代入(1)，得原方程的一个解为

$$y=xe$$

由

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p}{y}$$

可解得 $p=Cy$，代入(1)，得原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C}e^{Cx}.$$

【155】 $y^2(1+y'^2)=1$

解 令 $y'=\tan t$ 代入原方程，得

$$y=\pm\cos t$$

又因为

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{\mp\sin t\,\mathrm{d}t}{\tan t}=\mp\cos t\,\mathrm{d}t$$

两边积分得

$$x=\mp\sin t+C$$

于是，方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\mp\sin t+C\\ y=\pm\cos t\end{cases}$$

若消去参数 t，则得通解为

$$(C-x)^2+y^2=1$$

此外，$y=\pm1$ 也是解.

【156】 $(y')^3+(y')^2-y'+1=0$

解 因它是 y' 的奇次代数方程，且系数为实数，至少有一

个实根，设为 $y'=a$，则

$$y=ax+C$$

是微分方程的解. 将 $a=\dfrac{y-C}{x}$ 代入 $y'=a$ 得

$$y'=\frac{y-C}{x}$$

代入原方程，得方程的通解为

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3+\left(\frac{y-C}{x}\right)^2-\left(\frac{y-C}{x}\right)+1=0.$$

【157】 $x^2+(y')^2=1$

解　令 $y'=\cos t$，则

$$x=\pm\sin t$$

又因为 $dy=y'dx$，即得

$$dy=\pm\cos^2 t\,dt$$

两边积分，得

$$y=\pm\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C$$

于是，方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\pm\sin t\\ y=\pm\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin 2t}{4}\right)+C.\end{cases}$$

【158】 $(x^2-1)(y')^2+x^2=0$

解　令 $x=\cos t$，代入方程，得

$$y'=\pm\cot t$$

又因为 $dy=y'dx$，即得

$$dy=\mp\cos t\,dt$$

两边积分得

$$y = \mp \sin t + C$$

于是，方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \mp \sin t + C \end{cases}$$

若消去参数 t，则得通解为

$$x^2 + (y - C)^2 = 1.$$

【159】 $(y')^3 - y^2(a - y') = 0$

解 令 $y' = p, y = pt$，代入方程得

$$p = \frac{at^2}{1 + t^2}$$

从而得到

$$y = \frac{at^3}{1 + t^2}$$

代入 $dx = \frac{1}{p}dy$，整理后得

$$dx = \frac{3 + t^2}{1 + t^2}dt$$

两边积分后得到

$$x = t + 2\arctan t + C$$

于是，方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = t + 2\arctan t + C \\ y = \dfrac{at^3}{1 + t^2}. \end{cases}$$

【160】 $(y')^3 - x^3(1 - y') = 0$

解 令 $y' = p = tx$，代入方程得

$$x = \frac{1 - t^3}{t}$$

从而得到

$$p=1-t^3$$

代入 $dy=p dx$ 得

$$dy=(1-t^3)\left(\frac{1+2t^3}{-t^2}\right)dt$$

即

$$dy=\left(-\frac{1}{t^2}-t+2t^4\right)dt$$

两边积分得

$$y=\frac{1}{t}-\frac{t^2}{2}+\frac{2}{5}t^5+C$$

于是，方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^3}{t} \\ y=\dfrac{1}{t}-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{2}{5}t^5+C. \end{cases}$$

【161】 $(y')^3+y^3-3yy'=0$

解　令 $y'=p, y=pt$，代入方程得

$$p=\frac{3t}{1+t^3}$$

从而得到

$$y=\frac{3t^2}{1+t^3}$$

代入 $dx=\frac{1}{p}dy$，并化简得

$$dx=\frac{2-t^3}{1+t^3}dt$$

两边积分得

$$x=-t+\ln\frac{|1+t|}{\sqrt{1-t+t^2}}+2\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C$$

因此，方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = -t + \ln\dfrac{|1+t|}{\sqrt{1-t+t^2}} + 2\arctan\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}} + C \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

此外，$y=0$ 也是方程的一个解.

【162】 $y = xy' + y' + (y')^2$

解 这是克莱罗方程，其通解为直线族

$$y = xC + C + C^2$$

因为 $f(p) = p + p^2$，所以 $f'(p) = 1 + 2p$. 于是，得方程的奇解为

$$\begin{cases} x = -f'(p) = -(1+2p) \\ y = -pf'(p) + f(p) = -p^2 \end{cases}$$

消去 p 得特解

$$y = \frac{(x+1)^2}{-4}.$$

【163】 $y = xy' + \dfrac{m}{y'}$

解 这是克莱罗方程，其通解为直线族

$$y = xC + \frac{m}{C}$$

因为 $f(p) = \dfrac{m}{p}$，所以 $f'(p) = -\dfrac{m}{p^2}$，于是，得方程的奇解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{p^2} \\ y = \dfrac{2m}{p} \end{cases}$$

消去 p 得

$$y^2=4mx.$$

【164】　$x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{(y')^2}$

解　将方程改写为

$$x=y\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$$

这可以看成是以 x 为未知函数的克莱罗方程，令 $p=\frac{dx}{dy}$，其通解为直线族

$$x=yC+C^2$$

方程的奇解为

$$\begin{cases}y=-2p\\x=-p^2\end{cases}$$

消去参数 p 得

$$x=-\frac{y^2}{4}.$$

【165】　$x^2(y-xy')=y\cdot(y')^2$

解　令 $x^2=u,y^2=v$，则原方程化为

$$v=u\cdot\frac{dv}{du}+\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \tag{1}$$

这是一个以 v 为未知函数的克莱罗方程，它的通解为

$$v=Cu+C^2$$

代回原变量，得原方程的通解

$$y^2=Cx^2+C^2$$

方程(1)的特解为

$$\begin{cases}u=-2p\\v=-p^2\end{cases}$$

消去 p 得

$$v=-\frac{u^2}{4}$$

代回原变量，得原方程的特解为

$$y^2=-\frac{x^4}{4}$$

上式无意义，应舍去，故原方程无特解.

【166】 $4x^2y=2x^3y'-a(y')^2$

解 令 $u=x^2$，代入原方程，得到

$$y=u\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}-a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2$$

这是一个克莱罗方程，其通解为

$$y=Cu-aC^2$$

特解为

$$\begin{cases}u=2ap\\ y=up-ap^2=ap^2\end{cases}$$

消去 p 得

$$y=\frac{u^2}{4a}$$

代回原变量，得到原方程的通解及特解分别为

$$y=Cx^2-aC^2,\qquad y=\frac{1}{4a}x^4.$$

【167】 $(a^2-x^2)(y')^2+2xyy'+x^2=0$

解 令 $u=x^2,v=2y$，将原方程化为

$$u=v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2+a^2$$

这是一个克莱罗方程，其通解为

$$u=vC+C^2+a^2$$

特解为

$$\begin{cases} v = -2p \\ u = vp + p^2 + a^2 \end{cases}$$

消去 p 得

$$u = -\frac{v^2}{4} + a^2$$

代回原变量，得原方程的通解为

$$x^2 = 2yC + C^2 + a^2$$

特解为

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

【168】 $4e^{2y}(y')^2 + 2xy' - 1 = 0$

解　令 $v = e^{2y}$，将原方程化为

$$v = x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 .$$

这是一个克莱罗方程，其通解为

$$v = xC + C^2$$

特解为

$$\begin{cases} x = -2p \\ v = -p^2 \end{cases}$$

消去参数 p 得

$$v = -\frac{x^2}{4}$$

代回原变量，得到原方程的通解为

$$e^{2y} = xC + C^2$$

特解为

$$e^{2y} = -\frac{x^2}{4}$$

但上式是一个矛盾方程，应舍去，所以原方程没有特解.

求下列给定曲线族的包络(习题 169～172)

【169】 $(x-C)^2+(y-C)^2=4$

解 用 C 判别曲线法，从

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)=(x-C)^2+(y-C)^2-4=0\\ \Phi_C(x,y,C)=-2(x-C)+2(-y+C)=0\end{cases}$$

消去常数 C，得到 C 判别曲线

$$(x-y)^2=8$$

即

$$y=2\sqrt{2}+x \quad 或 \quad y=x-2\sqrt{2}$$

又因

$$\begin{aligned}&\Phi_x^2(x,y,C)+\Phi_y^2(x,y,C)\\ &=4[(x-C)^2+(y-C)^2]=16\end{aligned}$$

即沿着 C 判别曲线有 $\Phi_x^2+\Phi_y^2\neq 0$，所以 $y=x\pm 2\sqrt{2}$是所求曲线族的包络.

【170】 $C^2y+Cx^2-1=0$

解 用 C 判别曲线法，从

$$\begin{cases}\Phi=C^2y+Cx^2-1=0\\ \Phi_C=2Cy+x^2=0\end{cases}$$

消去 C 得 C 判别曲线

$$x^4+4y=0$$

经检验

$$\Phi_x^2+\Phi_y^2=4C^2x^2+C^4\neq 0$$

(在原曲线族中，若 $C=0$ 是无意义的)，从而所求曲线族的包络为

$$x^4+4y=0.$$

【171】 曲线族$(y-a)^2-x^3=0$有无包络?(a是常数)

解 根据C判别曲线法，考虑如下联立方程组

$$\begin{cases}(y-a)^2-x^3=0\\-2(y-a)=0\end{cases}$$

消去常数a得

$$x=0$$

因为易计算原曲线族在点$(0,a)$的导数$\frac{dy}{dx}=0$，所以$x=0$不是曲线族的包络.

【172】 $(x-C)^2+y^2=4C$

解 由方程组

$$\begin{cases}\Phi=(x-C)^2+y^2-4C=0\\\Phi_C=-2(x-C)-4=0\end{cases}$$

消去C得到C判别曲线

$$y^2=4(x+1)$$

由于

$$\Phi_x^2+\Phi_y^2=4(x-C)^2+4y^2=16C\neq0$$

(在原函数族中不含$C=0$). 所以$y^2=4(x+1)$是所求曲线族的包络.

求下列微分方程的奇解(习题173～177)

【173】 $y'=\sqrt{1-y^2}$ $(|y|\leqslant1)$

解 $f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$

所以它的特解$y=\pm1$可能破坏解的惟一性，它可能是奇解. 由分离变量法，求得方程的通解是

$$y=\sin(x+C)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

易知 $y=1, y=-1$，分别与曲线族中每一条曲线相切于点 $\left(\frac{\pi}{2}-C,1\right)$及$\left(-\frac{\pi}{2}-C,-1\right)$，故 $y=1, y=-1$，均是方程的奇解.

【174】 $xp^2+2xp-y=0 \quad (p=\frac{dy}{dx})$

解 用 p 判别法，从

$$\begin{cases} xp^2+2xp-y=0 \\ 2xp+2x=0 \end{cases}$$

中消去 p 得原方程的特解

$$y=-x$$

再求通解，方程易对 y 解出，可写为

$$y=xp^2+2xp$$

两边关于 x 求导得

$$p=p^2+2xp\frac{dp}{dx}+2p+2x\frac{dp}{dx}$$

整理得

$$-\frac{dx}{2x}=\frac{dp}{p}$$

两边积分得原方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{p^2} \\ y=xp^2+2xp \end{cases}$$

消去 p 得积分曲线族

$$(y-C)^2=4Cx$$

记 $\Phi=(y-C)^2-4Cx$，可求得曲线族 $\Phi=0$ 的包络为

$$x=0, y=-x$$

因此，$y=-x$ 是奇解.

【175】　$y=2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$

解　求出方程的 p 判别曲线

$$\begin{cases}y=2xp+p^2\\2x+2p=0\end{cases}\quad\left(p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

消去 p 即得

$$y=-x^2$$

经计算，$y=-x^2$ 不是原方程的解，因而原方程没有奇解.

【176】　$y+xy'=x^4(y')^2$

解　求出方程 p 的判别曲线

$$\begin{cases}y+xp-x^4p^2=0\\x-2x^4p=0\end{cases}\qquad\left(p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

消去 p 即得

$$4x^2y+1=0$$

令 $u=\frac{1}{x}$，代入原方程，得

$$y=u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2$$

这是克莱罗方程，因而

$$\begin{cases}u=-2p\\y=pu+p^2\end{cases}\tag{1}$$

是通解 $y=Cu+C^2$ 的包络，代回原变量得原方程的积分曲线族为

$$y=\frac{C}{x}+C^2$$

而(1)消去 p，令 $u=\frac{1}{x}$，得 $4x^2y+1=0$，所以它是原方程的

奇解.

【177】 求 $xp^2-3yp+9x^2=0$ 的奇解. $\left(p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$

解 先求出满足方程的积分曲线族

$$3Cy=C^2x^3+9 \tag{1}$$

再求该积分曲线族的包络

$$\begin{cases}3Cy=C^2x^3+9\\3y=2Cx^3\end{cases}$$

消去 C 得

$$y^2=4x^3$$

此即为原方程的奇解.

【178】 试证：克莱罗方程的 p 判别曲线就是它的通解的 C 判别曲线，因而也是方程通解的包络，从而是方程的奇解.

证 克莱罗方程

$$y=xp+f(p) \tag{1}$$

的 p 判别曲线为

$$\begin{cases}y=xp+f(p)\\0=x+f'(p)\end{cases} \tag{2}$$

其中 p 为参数. (1)的通解为 $y=xC+f(C)$，从而可求得 C 判别曲线为

$$\begin{cases}y=xC+f(C)\\0=x+f'(C)\end{cases} \tag{3}$$

其中 C 为参数，显然(2),(3)表示的是同一条曲线. 因此方程(1)的判别曲线是积分曲线族的包络，从而也是方程的奇解.

§2.7　高阶方程的降阶

提　　要

高阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

1.形式为

$$F(x,y^{(n)})=0$$

的高阶方程可用初等积分法求解，分两种情况考虑.

ⅰ）若可对 $y^{(n)}$ 解出，写为 $y^{(n)}=f(x)$，则通过 n 次积分得通解

$$y=\underbrace{\int_{x_0}^{x}\cdots\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n\text{次}}f(x)(\mathrm{d}x)^n+\frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$+\frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\cdots+C_n$$

ⅱ）若不易从 $F(x,y^{(n)})=0$ 解出 $y^{(n)}$ 时，这时适当引入参数将方程改写成参数形式

$$x=\varphi(t),\qquad y^{(n)}=\psi(t)$$

$$\mathrm{d}y^{(n-1)}=y^{(n)}\mathrm{d}x=\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

得

$$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+C_1\equiv\psi_1(t,C_1)$$

如此继续下去，最后得通解的参数表示

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi_n(t,C_1,C_2,\cdots,C_n)\end{cases}$$

2. 方程不显含 $y, y', \cdots, y^{(k-1)}$ 的高阶方程，即方程呈形式

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

这时，若令新变量 $z = y^{(k)}$，则(2)可降为 $(n-k)$ 阶方程

$$F(x, z, z', \cdots, z^{(n-k)}) = 0$$

3. 方程不显含自变量 x 的高阶方程

$$F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{3}$$

令 $y' = z$，且将 y 当作自变量，则有

$$y' = z$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = g_2\left(z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)$$

……

$$y^{(n)} = g_n\left(z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right)$$

将以上各式代入原方程，得 z 对 y 的 $(n-1)$ 阶方程

$$F\left(y, z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right) = 0$$

4. 假如方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

的左端恰为某一函数 $\Phi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 对 x 的导数，即方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = 0$$

这类方程的解法与全微分方程的解法相类似，显然可降低一阶，成为

$$\Phi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = C$$

之后再设法求解这个方程.

题　解

求解下列微分方程

【179】　$yy''-(y')^2-y^2y'=0$

解　这是不显含 x 的二阶方程. 易见 $y=0$ 为一解. 若 $y\neq0$, 方程两边同除以 y^2 得

$$\frac{y''}{y}-\frac{(y')^2}{y^2}-y'=0$$

令 $y'=p,y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 则方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p}{y}+y \tag{1}$$

即有

$$\left(p\frac{1}{y}\right)'=1$$

所以(1)的通解为

$$p=y^2+Cy$$

从而得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(y+C)$$

将变量分离, 两边积分得

$$\ln\frac{y}{y+C}=Cx+C_1$$

化简得原方程通解为

$$y=\frac{Ce^{Cx+C_1}}{1-e^{Cx+C_1}}$$

C,C_1 为任意常数, 这时特解 $y=0$ 包含于上述通解中.

【180】　$yy''+(y')^2+1=0$

解　这是一个不显含 x 的二阶方程. 将原方程写为

$$(yy')' = -1$$

积分一次得

$$yy' = -x + C_1$$

即

$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = -x + C_1$$

两边积分得

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

因而，原方程的通解为

$$y^2 = -x^2 + 2C_1x + 2C_2$$

或

$$y^2 = -x^2 + C_1'x + C_2'.$$

【181】 $2yy'' = (y')^2$

解 这是一个不显含 x 的二阶方程. 令 $y' = p$, 则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$2yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2$$

由此得到

$$p = 0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{2y}$$

由 $p = 0$ 得到

$$y' = p = 0$$

积分得

$$y = C$$

由

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{2y}$$

两边积分得

$$p=C\sqrt{y}$$

代回 $y'=p$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C\sqrt{y}$$

这是变量分离方程，两边积分得原方程通解

$$y=(C_1x+C_2)^2$$

易见，$y=C$ 包含于上述通解中.

【182】 $y^3y''+1=0$

解　令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得

$$p\mathrm{d}p=-\frac{1}{y^3}\mathrm{d}y$$

两边积分得

$$p^2=\frac{1+Cy^2}{y^2}$$

从而将方程降为一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\frac{\sqrt{1+Cy^2}}{y}$$

将变量分离，易求得其通解为

$$1+Cy^2=(Cx+C_1)^2.$$

【183】 $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0$

解　令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{1-y}p^2=0$$

由此得

$$p=0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2}{y-1}\mathrm{d}y$$

由 $p=0$ 得

$$y=C$$

由

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2}{y-1}\mathrm{d}y$$

两边积分得

$$p=C(y-1)^2$$

于是原方程降为一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C(y-1)^2$$

这是变量分离方程，易求得通解为

$$y=1+\frac{1}{C_1x+C_2}$$

特解 $y=C$ 不包含于上述通解中.

【184】 $xy''+(x^2-1)(y'-1)=0$

解 将方程化为

$$\frac{y''}{y'-1}+\frac{x^2-1}{x}=0$$

令 $y'=z$，则上式化为

$$[\ln(z-1)]'=\frac{-x^2+1}{x}$$

两边积分得

$$\ln(z-1)=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C$$

因此

$$y' = C_1 \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$$

再积分一次得通解

$$y = -C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + x + C_2.$$

【185】 $xy'' + y' = 4x$

解 令 $y' = p$，则 $y'' = p'$，代入方程得

$$x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + p = 4x$$

这是线性方程，解之得

$$(px)' = 4x$$

两边积分，得到

$$px = 2x^2 + C$$

从而

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + \frac{C}{x}$$

再积分一次得通解

$$y = x^2 + C\ln|x| + C_1.$$

【186】 $x = (y'')^2 + 1$

解 令 $y'' = p$，则原方程写为

$$x = p^2 + 1$$

于是

$$\mathrm{d}x = 2p\mathrm{d}p$$
$$\mathrm{d}y' = y''\mathrm{d}x = 2p^2\mathrm{d}p$$

两边积分得

$$y' = \frac{2}{3}p^3 + C_1$$

再积分一次得

$$y=\int y'\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{3}p^3+C_1\right)2p\mathrm{d}p$$

$$=\frac{4}{15}p^5+C_1p^2+C_2$$

由此，得到原方程参数形式的通解

$$\begin{cases}x=p^2+1\\ y=\dfrac{4}{15}p^5+C_1p^2+C_2.\end{cases}$$

【187】 $y''+(y')^2+1=0$

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-(1+p^2)$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$p=\tan(-x+C_1)$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan(-x+C_1)$$

再积分一次得通解

$$y=\ln\left|\cos(x-C_1)\right|+C_2.$$

【188】 $y'=xy''+(y'')^2$

解 设 $y'=p$，则原方程化为

$$p=xp'+(p')^2$$

这是以 p 为未知量的克莱罗方程，它的通解为

$$p = xC + C^2$$

特解为

$$p = -\frac{x^2}{4}$$

则由

$$\frac{dy}{dx} = xC + C^2 \quad 及 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{4}$$

积分得到原方程的通解

$$y = \frac{C}{2}x^2 + C^2 x + C_1$$

特解

$$y = -\frac{1}{12}x^3 + C.$$

【189】　$yy'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0$

解　显然，$y = 0$ 是该方程的解，当 $y \neq 0$ 时将方程改写为

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 6x$$

令 $\frac{y'}{y} = z$，则原方程化为

$$z' = 6x$$

两边积分，得到

$$z = 3x^2 + C_1$$

从而

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 + C_1$$

两边再次积分得通解

$$\ln|y| = x^3 + C_1 x + C_2.$$

【190】　$x^2 yy'' - x^2(y')^2 - 4xyy' + 8y^2 = 0$

解 易见 $y=0$ 为该方程的一解，若 $y\neq 0$，方程两边同除以 y^2，得

$$x^2\left(\frac{y'}{y}\right)'-4x\left(\frac{y'}{y}\right)+8=0$$

令 $\frac{y'}{y}=z$，则方程化为

$$x^2z'-4xz+8=0$$

这是一个线性方程，解出 z 为

$$z=Cx^4+\frac{8}{5x}$$

即有

$$\frac{y'}{y}=Cx^4+\frac{8}{5x}$$

积分得通解

$$\ln|y|=C_1x^5+\frac{8}{5}\ln|x|+C_2.$$

【191】 $x[yy''+(y')^2]+3yy'=2x^3$

解 方程可写为

$$x(yy')'+3(yy')=2x^3$$

令 $yy'=z$，则方程可化简为

$$xz'+3z=2x^3$$

这是线性方程. 方程两端同乘 x^2，得

$$x^3z'+3x^2z=2x^5$$

即

$$(x^3z)'=2x^5$$

两边积分得

$$z=\frac{1}{3}x^3+\frac{C}{x^3}$$

即有

$$yy'=\frac{1}{3}x^3+\frac{C}{x^3}$$

从而得到

$$y\mathrm{d}y=\left(\frac{C}{x^3}+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}x$$

两边积分得到通解

$$y^2=C_1x^{-2}+\frac{1}{6}x^4+C_2.$$

【192】 $ay''=[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}$

解 令 $y'=p$，代入方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{a}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$$

两边积分得

$$x=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}+C_1$$

又由 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$，得

$$\mathrm{d}y=\frac{ap\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

再次积分，得到

$$y=\frac{-a}{\sqrt{1+p^2}}+C_2$$

于是，方程参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}+C_1\\[2ex] y=\dfrac{-a}{\sqrt{1+p^2}}+C_2\end{cases}$$

消去参数 p 得

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2.$$

【193】 $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$

解 原式为

$$y''=\frac{y'}{x}\ln\frac{y'}{x}$$

令$\frac{y'}{x}=z$，则上式化为

$$z+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=z\ln z$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{z(\ln z-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分，并化简得

$$z=e^{C_1x+1}$$

从而有

$$y'=xe^{C_1x+1}$$

两边积分，得到原方程通解

$$y=\frac{1}{C_1}xe^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2.$$

【194】 $y''(1+2\ln y')=1$

解 令 $y'=p$，代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+2\ln p}$$

所以

$$\mathrm{d}x=(1+2\ln p)\mathrm{d}p$$

两边积分得

$$x = -p + 2p\ln p + C_1$$

又因 $dy = y'dx$，得

$$dy = p(1 + 2\ln p)dp$$

再次积分得

$$y = p^2\ln p + C_2$$

于是，方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = -p + 2p\ln p + C_1 \\ y = p^2\ln p + C_2. \end{cases}$$

【195】 $yy'' - (2y')^2 \cdot \dfrac{1}{2} = 0$

解　这是一个不显含 x 的方程，将原方程改写为

$$yy'' - 2(y')^2 = 0$$

令

$$p = y', \qquad y'' = \frac{dp}{dy}p$$

代入方程得

$$py\frac{dp}{dy} - 2p^2 = 0$$

$p = 0$，即 $y = C$ 是该方程的一个解．当 $p \neq 0$ 时

$$\frac{dp}{2p} = \frac{dy}{y}$$

得解

$$p = C_1y^2$$

即

$$\frac{dy}{dx} = C_1y^2$$

两边积分得

$$-\frac{1}{y}=C_1x+C_2$$

原方程的通解为

$$y=-\frac{1}{C_1x+C_2}.$$

【196】 试证:形如

$$F(x,y,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}^2y,\cdots,\mathrm{d}^ny)=0$$

的 n 阶方程, 若左端关于全部变元是 m 次齐次函数, 即有

$$F(tx,ty,t\mathrm{d}x,t\mathrm{d}y,t\mathrm{d}^2y,\cdots,t\mathrm{d}^ny)$$
$$=t^mF(x,y,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}^2y,\cdots,\mathrm{d}^ny)$$

则可令变换

$$x=e^\tau,\qquad y=ue^\tau$$

总可使相应方程降低一阶.

证 在变换下有

$$\mathrm{d}x=e^\tau\mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}+u$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\right)e^{-\tau}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\tau^3}-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\right)e^{-2\tau}$$

……

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\omega(u,u',u'',\cdots,u^{(n)})e^{-(n-1)\tau}$$

对应地有

$$\mathrm{d}x=e^\tau\mathrm{d}\tau$$

$$\mathrm{d}y=(\mathrm{d}u+u\mathrm{d}\tau)e^{\tau}$$

$$\mathrm{d}^2y=(\mathrm{d}^2u+\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau)e^{\tau}$$

$$\mathrm{d}^3y=(\mathrm{d}^3u-\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau^2)e^{\tau}$$

……

$$\mathrm{d}^ny=\overline{\omega}(u,\mathrm{d}\tau,\mathrm{d}u,\cdots,\mathrm{d}\tau^n,\mathrm{d}^nu)e^{\tau}$$

将变换本身及以上各式代入方程，由齐次性得

$$F(1,u,\mathrm{d}\tau,\mathrm{d}u+u\mathrm{d}\tau,\cdots,\overline{\omega}(u,\mathrm{d}\tau,\cdots))=0$$

这是不显含自变量 τ 的 n 阶方程，可令

$$u'=z$$

且以 u 为自变量，则至少可降低一阶.

【197】 解方程

$$x^4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x^3\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+3x^2y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-(3xy^2+2x^3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
$$+2x^2y+y^3=0$$

解　这是左端关于 $x,y,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}^2y$ 的三次齐次函数. 令

$$x=e^{\tau},y=ue^{\tau}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}+u$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=e^{-\tau}\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

代入原方程，消去公因子 $e^{3\tau}$，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\tau^2}-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\right)^3=0 \tag{1}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=p \tag{2}$$

则

$$\frac{d^2u}{d\tau^2}=p\frac{dp}{du} \tag{3}$$

将(2)、(3)代入(1)式，得到

$$p\left(\frac{dp}{du}-1-p^2\right)=0$$

因此

$$p=0 \quad 或 \quad \frac{dp}{du}=1+p^2$$

由

$$\frac{dp}{du}=1+p^2$$

得

$$p=\tan(u+C_1)$$

即
$$\frac{du}{d\tau}=\tan(u+C_1)$$

再积分可得

$$\sin(u+C_1)=C_2e^{\tau}$$

即原方程的通解为

$$y=x\arcsin(C_2x)-C_1x$$

由 $p=0$ 得 $u=C$，即 $y=Cx$ 也是解，但此解包含在上述通解中.

【198】 解方程

$$y'''y''=\sqrt{1+(y'')^2}$$

解 令 $p=y''$，代入原方程，得

$$p\frac{dp}{dx}=\sqrt{1+p^2}$$

即
$$\mathrm{d}x=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\mathrm{d}p$$
两边积分得
$$x=\sqrt{1+p^2}-C_1$$
$$y'=\int p\mathrm{d}x=\int\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}\mathrm{d}p$$
$$=\int\sqrt{1+p^2}\mathrm{d}p-\int\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\mathrm{d}p$$
$$=\left[\frac{p}{2}\sqrt{1+p^2}-\frac{1}{2}\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|\right]+C_2$$
$$y=\int y'\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[p^2-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|\right]\mathrm{d}p$$
$$+C_2\int\frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}$$
由于
$$\int\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|\mathrm{d}p$$
$$=\sqrt{1+p^2}\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|-p$$
$$\int\frac{C_2p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=C_2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$$
故
$$y=\frac{1}{6}p^3+\frac{1}{2}p+C_2\sqrt{1+p^2}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|+C_3$$
上式与表示式
$$x=\sqrt{1+p^2}-C_1$$

为原方程参数形式的解，其中 p 为参数．

求解下列高阶微分方程

【199】 $3(y'')^2-y'y'''=0$

解 将原方程改写为

$$\frac{(y'')^2-y'y'''}{(y'')^2}=-2$$

即

$$\left(\frac{y'}{y''}\right)'=-2$$

两边积分得

$$\frac{y'}{y''}=-2x+C_1$$

设 $y'=p$，则上式化为

$$\frac{-2\mathrm{d}x}{-2x+C_1}=\frac{-2}{p}\mathrm{d}p$$

两边积分得

$$-2x+C_1=\frac{C_2}{p^2}$$

因此

$$p=\pm\sqrt{\frac{C_2}{-2x+C_1}}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{\frac{C_2}{-2x+C_1}}$$

两边积分得通解

$$y=\mp\sqrt{C_2}\cdot\sqrt{-2x+C_1}+C_3$$

若 $y''=0$，则

$$y=C_1x+C_2$$

易见，它也是原方程的一个解.

【200】　$(y'')^2-y'y'''=\left(\frac{y'}{x}\right)^2$

解　当 $y'\neq 0$ 时，原方程可化为

$$\frac{y'y'''-(y'')^2}{(y')^2}=-\frac{1}{x^2}$$

即

$$\left(\frac{y''}{y'}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

两边积分得

$$\frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}+C_1$$

再对上式两边积分，得到

$$\ln|y'|=\ln|x|+C_1x+\ln|C_2|$$

即

$$y'=C_2xe^{C_1x}$$

两边积分得通解

$$y=\frac{C_2}{(C_1)^2}(C_1xe^{C_1x}-e^{C_1x})+C_3$$

若 $y'=0$，即 $y=C$ 也是方程的解，它包含在上述通解中.

【201】　$2xy''y'''=(y'')^2-a^2$

解　原方程可写为

$$x[(y'')^2]'=(y'')^2-a^2$$

若设$(y'')^2=u$，代入上式得

$$xu'=u-a^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u-a^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad (u\neq a^2)$$

两边积分得

$$u-a^2=C_1x$$

即

$$y''=\pm\sqrt{a^2+C_1x}$$

对上式两边积分得

$$y'=\pm\frac{2}{3C_1}(a^2+C_1x)^{\frac{3}{2}}+C_2$$

再两边积分，得通解

$$y=\frac{\pm 4}{15(C_1)^2}(a^2+C_1x)^{\frac{5}{2}}+C_2x+C_3$$

若 $u=a^2$，即

$$y''=\pm a$$

积分得

$$y=\pm\frac{a}{2}x^2+C_1x+C_2$$

它是方程的一个特解，不包含在上述通解中.

【202】 $9y^2y'''-45yy'y''+40(y')^3=0$

解 用 $y^{-\frac{11}{3}}$乘原方程两端，得

$$9y^{-\frac{5}{3}}y'''-45y^{-\frac{8}{3}}y'y''+40y^{-\frac{11}{3}}(y')^3=0 \tag{1}$$

设 $u=y^{-\frac{2}{3}}$，则

$$u'=-\frac{2}{3}y^{-\frac{5}{3}}y'$$

$$u''=\frac{10}{9}y^{-\frac{8}{3}}(y')^2-\frac{2}{3}y^{-\frac{5}{3}}y''$$

$$u'''=-\frac{80}{27}y^{-\frac{11}{3}}(y')^3+\frac{10}{3}y^{-\frac{8}{3}}y'y''-\frac{2}{3}y^{-\frac{5}{3}}y'''$$

$$=\frac{-2}{27}[40y^{-\frac{11}{3}}(y')^3+9y^{-\frac{5}{3}}y'''-45y^{-\frac{8}{3}}y'y'']$$

因此(1)式等价于

$$u'''=0$$

积分得

$$u=C_1x^2+C_2x+C_3$$

即

$$y^{-\frac{2}{3}}=C_1x^2+C_2x+C_3$$

于是，原方程的通解为

$$y^2=(C_1x^2+C_2x+C_3)^{-3}.$$

【203】 $(x+y^2)y'''+6yy'y''+3y''+2(y')^3=0$

解　将该方程重新分项组合，得到

$$[(1+2yy')y''+(x+y^2)y''']+[2(y')^3+4yy'y'']+2y''=0$$

即

$$[(x+y^2)y''+2y(y')^2+2y']'=0$$

积分得

$$(x+y^2)y''+2y(y')^2+2y'=C_1$$

将上式写为

$$[(x+y^2)y''+(1+2yy')y']+y'=C_1$$

两边积分，得

$$(x+y^2)y'+y=C_1x+C_2$$

用 3 乘上式两端，得

$$3(x+y^2)y'+3y=3C_1x+3C_2$$

经整理得

$$(3xy)'+(y^3)'=3C_1x+3C_2$$

两边积分得通解

$$3xy+y^3=\frac{3}{2}C_1x^2+3C_2x+C_3.$$

【204】 $y^2y'''-3yy'y''+2(y')^3+\frac{y}{x}[yy''-(y')^2]=\frac{y^3}{x^2}$

解 用$\frac{1}{y^3}$乘方程两端，

$$\frac{yy'''-3y'y''}{y^2}+\frac{2(y')^3}{y^3}+\frac{yy''-(y')^2}{xy^2}=\frac{1}{x^2}$$

令 $z=\frac{y'}{y}$，则上式化为

$$z''+\frac{z'}{x}=\frac{1}{x^2}$$

令 $z'=p$，代入上式得

$$p'+\frac{1}{x}p=\frac{1}{x^2}$$

上式两端同乘 x 得

$$p'x+p=\frac{1}{x}$$

即

$$(xp)'=\frac{1}{x}$$

两边积分得

$$xp=\ln|x|+C_1$$

即

$$p=\frac{1}{x}\ln|x|+\frac{C_1}{x}$$

上式即为

$$\left(\frac{y'}{y}\right)'=\frac{1}{x}\ln|x|+\frac{C_1}{x}$$

两边积分得

$$\frac{y'}{y}=\frac{(\ln|x|)^2}{2}+C_1\ln|x|+C_2$$

再将上式两边积分，得到

$$\ln|y|=\frac{x}{2}(\ln|x|)^2+(C_1-1)(x\ln|x|-x)+C_2x+C_3$$

此外，$y=0$ 为方程的一个特解.

【205】 $5(y''')^2-3y''y^{(4)}=0$

解　原方程可化为

$$\frac{(y''')^2-y''y^{(4)}}{(y''')^2}=-\frac{2}{3}\quad (y'''\neq 0)$$

即

$$\left(\frac{y''}{y'''}\right)'=-\frac{2}{3}$$

两边积分得

$$\frac{y''}{y'''}=-\frac{2}{3}x+C_1$$

令 $y''=p$，上式化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}x}{-\frac{2}{3}x+C_1}$$

两边积分得到

$$p=C_2\left(-\frac{2}{3}x+C_1\right)^{\frac{3}{2}}$$

即

$$y''=C_2\left(-\frac{2}{3}x+C_1\right)^{-\frac{3}{2}}$$

对上式两边积分得

$$y'=3C_2\left(-\frac{2}{3}x+C_1\right)^{-\frac{1}{2}}+C_3$$

对上式再次积分得通解

$$y=-9C_2\sqrt{-\frac{2}{3}x+C_1}+C_3x+C_4$$

易见，$y'''=0$ 也是方程的解，即

$$y=C_1x^2+C_2x+C_3$$

它是原方程的一个特解.

§2.8 小结习题

提　要

本章可用初等积分法求解的各种类型的微分方程，要熟练地掌握它们的解法. 应学习解微分方程的各种技巧，特别要善于根据方程的特点进行变形，或引进合适的代换，把它们变到我们熟悉的各种类型的方程.

题　解

通过适当地代换，求解下列方程

【206】 $e^{-y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1\right)=xe^x$

解 将原方程化为

$$\frac{dy}{dx}+1=xe^{x+y}$$

令 $x+y=u$，代入上式得

$$\frac{du}{e^u}=x dx$$

两边积分得

$$-e^{-u}=\frac{x^2}{2}+C$$

代回原变量，得通解

$$\frac{x^2}{2}+e^{-(x+y)}+C=0.$$

【207】 $\frac{dy}{dx}+x(y-x)+x^3(y-x)^3=1$

解　令 $y-x=u$，代入方程得

$$\frac{du}{dx}=-xu-x^3u^3$$

这是伯努利方程，作变换

$$z=u^{-2}$$

则上述伯努利方程化为线性方程

$$\frac{dz}{dx}=2xz+2x^3$$

易求得解为

$$z=Ce^{x^2}-x^2-1$$

即方程的通解为

$$\frac{1}{(y-x)^2}=Ce^{x^2}-x^2-1$$

此外，$y=x$ 也是方程的一个解.

【208】 $(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$

解　将方程写为

$$y(1+xy)\mathrm{d}x+x(1-xy)\mathrm{d}y=0$$

令 $u=xy$，代入上式，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2u^2}{u-1}\cdot\frac{1}{x}$$

易见 $u=0$ 为一解，若 $u\neq0$，分离变量

$$\frac{u-1}{2u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\ln|u|+\frac{1}{u}=2\ln|x|+C$$

代回原变量，得方程的通解

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right|+\frac{1}{xy}=C$$

此外，$y=0$ 也是它的解.

【209】　$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=2x^2y(y^2-x^2)$

解　令 $u=x^2y$，代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)u+\frac{2u^3}{x^3}$$

这是伯努利方程，再作变换

$$z=u^{-2}$$

则方程进一步化为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\left(-\frac{6}{x}+4x^3\right)z-\frac{4}{x^3}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{6}{x}-4x^3\right)z\right]x^6e^{-x^4}=-\frac{4}{x^3}\cdot x^6e^{-x^4}$$

即

$$[zx^6e^{-x^4}]' = -4x^3e^{-x^4}$$

两边积分后整理得

$$z = \frac{1}{x^6}e^{x^4}(C + e^{-x^4})$$

代回原变量，得原方程的通解

$$x^2 = y^2(Ce^{x^4} + 1)$$

此外，方程还有一解 $y = 0$.

【210】　$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = (x^2 + y)^2\mathrm{d}x$

解　令 $x^2 + y = u$，代入方程得

$$x\mathrm{d}u - (x^2 + u^2 + u)\mathrm{d}x = 0$$

即

$$\frac{-x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x}{x^2 + u^2} + \mathrm{d}x = 0$$

两边积分得

$$\arctan\frac{x}{u} + x = C$$

代回原变量，得原方程通解

$$y = x\cot(C - x) - x^2.$$

【211】　$4e^{2y}(y')^2 + 2xy' - 1 = 0$

解　设 $e^{2y} = u$，则原方程化为

$$u = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

这是克莱罗方程，其通解为

$$u = xC + C^2$$

特解为

$$u = -\frac{x^2}{4}$$

代回原变量，得原方程的通解为

$$e^{2y} = xC + C^2$$

特解为

$$e^{2y} = -\frac{x^2}{4}$$

但上式为矛盾方程，应舍去，故原方程无特解.

【212】 $y^2(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) + x(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) = 0$

解 因为

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2 + y^2)$$

$$y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = -x^2\mathrm{d}\frac{y}{x}$$

于是，我们想到，如果作极坐标变换：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ \mathrm{d} = \rho\sin\theta \quad (\rho \neq 0) \end{cases}$$

则

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}\rho^2 = \rho\mathrm{d}\rho$$

$$y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = -\rho^2\cos^2\theta\mathrm{d}\tan\theta = -\rho^2\mathrm{d}\theta$$

代入原方程，即得

$$\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho - \rho^3\cos\theta\mathrm{d}\theta = 0$$

将变量分离，积分后得

$$\rho + \frac{1}{\sin\theta} = C_1$$

代回原变量，得

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = C_1$$

所以原方程通解为

$$(x^2+y^2)(y+1)^2=Cy^2 \qquad (C=C_1^2)$$

此外，$y=0$ 是一特解.

【213】 $9y\dfrac{dy}{dx}-18xy+4x^3=0$

解　令 $z^2=y$，代入原方程得

$$9z^3\frac{dz}{dx}-9xz^2+2x^3=0$$

这是齐次方程，再作变换

$$z=ux$$

将方程化简为

$$\frac{9u^3du}{9u^4-9u^2+2}=-\frac{dx}{x}$$

再设 $u^2=v$，代入得

$$\frac{9vdv}{9v^2-9v+2}=-\frac{2}{x}dx$$

两边积分得

$$\frac{(3v-2)^2x^2}{3v-1}=C$$

代回原变量，得所求通解为

$$(3y-2x^2)^2=C(3y-x^2).$$

【214】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+y^2-6x+2y+4}{2xy+2x-2y-2}$

解　原方程为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(x-1)^2+(y+1)^2}{2(x-1)(y+1)}$$

令

$$\xi=x-1,\eta=y+1$$

代入方程得

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{3\xi^2+\eta^2}{2\xi\eta}$$

这是齐次方程，再作变换

$$u=\frac{\eta}{\xi}$$

则方程化为变量分离方程

$$\frac{2u\,du}{3-u^2}=\frac{d\xi}{\xi}$$

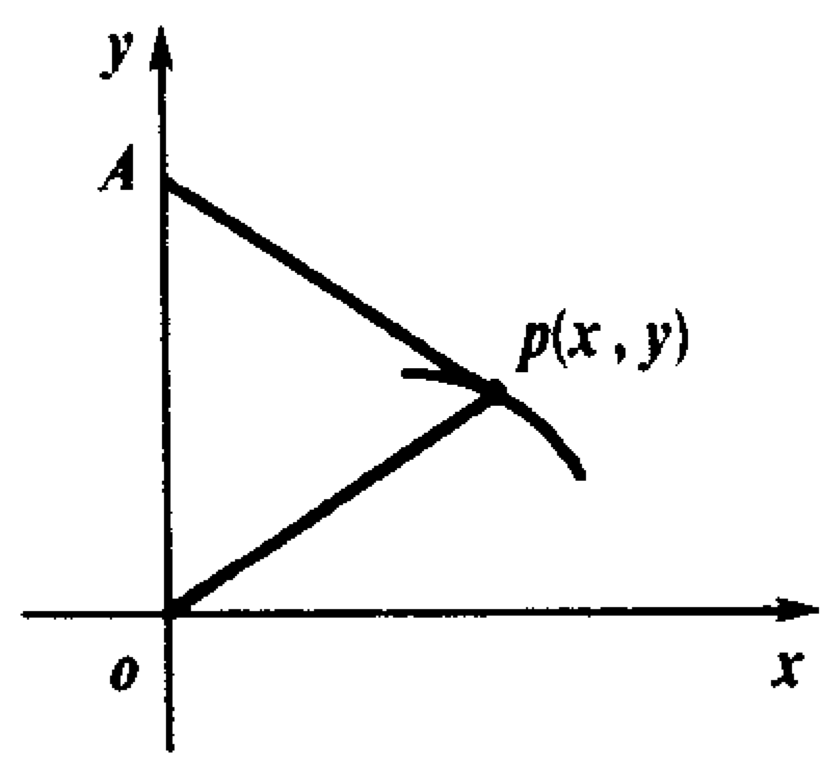
两边积分得

$$\xi(3-u^2)=C$$

代回原变量，得通解

$$3(x-1)^2-(y+1)^2=C(x-1).$$

【215】 求 xoy 平面上的一曲线，使其过每点的切线同该点的向径及 oy 轴一起构成一个等腰三角形.



(第 215 题图)

解 设此曲线方程为 $y=y(x)$，过此曲线上任一点 $p(x,y)$的切线为

$$Y-y=y'(X-x)$$

它交 oy 轴于点 $A(0,y-xy')$，使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形有三种可能：

1) $|OP|=|AP|$

这时有

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(xy')^2}$$

化简为

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{y}{x}$$

容易求得曲线为

$$xy = C$$

($y' = \frac{y}{x}$的解不合题意)

2) $|OA| = |OP|$

这时有

$$|y - xy'| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

化简，整理得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

这是齐次方程，可求得解

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$$

或

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$$

3) $|OA| = |AP|$

这时有

$$|y - xy'| = \sqrt{x^2 + (xy')^2}$$

两边平方，整理得

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

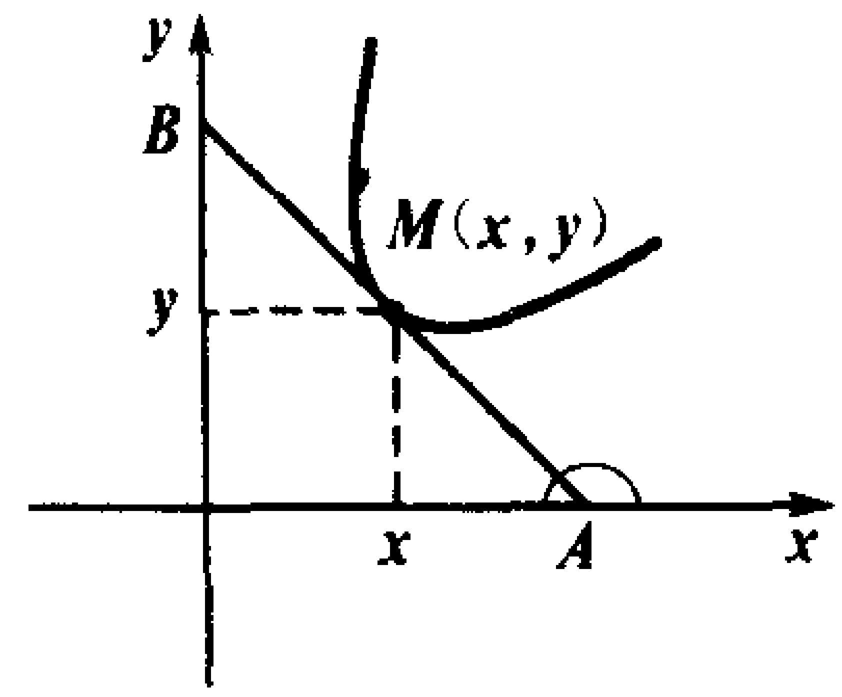
这也是齐次方程，容易求得解

$$x^2 + y^2 = Cx.$$

【216】 求一曲线，它的切线在坐标轴间的线段长等于常数 a.

解　设曲线方程为 $y = y(x)$，其上任取一点 $M(x, y)$，过 M 作切线交坐标轴于 A、B 两点，切线方程为 $Y - y = y'(X -$

x)，则得 A、B 两点的坐标分别为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$，$(0,y-xy')$，由 $|AB|=a$ 即得



（第 216 题图）

$$a^2=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2$$

整理后得微分方程

$$\frac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\pm(y-xy')$$

若记 $y'=p$，上式可化为

$$y=px\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

这是克莱罗方程，容易求得通解

$$y=xC\pm\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$$

奇解为

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

它们都满足题意的要求.

【217】 某国的人口增长与当前国内人口成正比. 若两年后，人口增加一倍；三年后，人口是 20 000 个，试估计该国最初人口.

解 设该国在时刻 t 的人口数为 N，最初的人口为 N_0，则由题意得

$$\frac{dN}{dt}-kN=0$$

这是变量分离方程，它有解

$$N = Ce^{kt}$$

把初始条件

$$t = 0, \qquad N = N_0$$

代入，得

$$C = N_0$$

于是

$$N = N_0 e^{kt}$$

当 $t = 2$ 时，$N = 2N_0$，将它们代入上式，得

$$2N_0 = N_0 e^{2k}$$

从而

$$k = \frac{1}{2}\ln 2$$

当 $t = 3$ 时，$N = 20\,000$，代入 N 的表达式，得

$$20\,000 = N_0 e^{\frac{3}{2}\ln 2} = N_0 \cdot 2^{\frac{3}{2}}$$

由上式求出

$$N_0 = \frac{20\,000}{2^{\frac{3}{2}}} \approx 7071$$

即该国最初人口为 7071 个.

【218】 如图所示的 $R-C$ 电路中，设 $E = 10$ 伏，$R = 100$ 欧，$C = 0.01$ 法，而开始时电容 C 上没有电荷，问：

1）当开关 K 合上“1”后，经过多长时间使电容 C 的电压 $U_C = 5$ 伏？

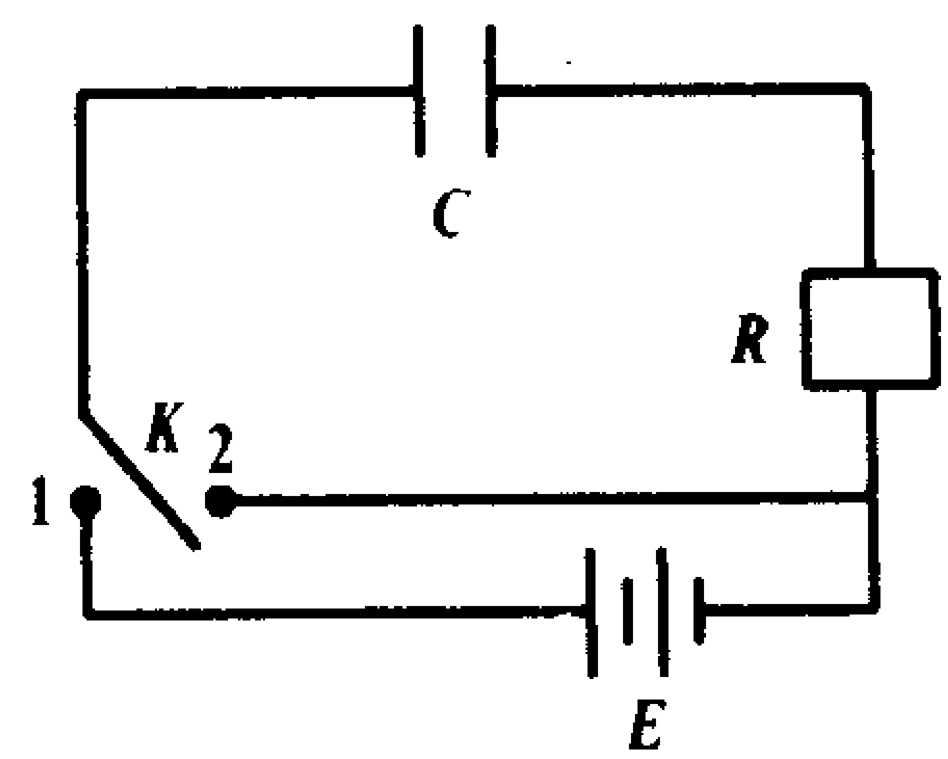
2）开关 K 合在“1”上相当长时间后，U_C 的值达到了（接近）外加电压 E，这时若将开关 K 突然转至“2”，试求 U_C 的变化规律，且求经过多长时间 $U_C = 5$ 伏？

解 这是电容器 C 的充放电过程，用到闭合回路的基尔霍夫定律，即有

$$U_C + RI = E$$

以 Q 记电容 C 上的电量，有

$$Q = CU_C$$



（第 218 题图）

而

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$$

代入上式得 U_C 满足的微分方程

$$RC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + U_C = E$$

容易求得它的通解是

$$U_C = E + ae^{-\frac{1}{RC}t} \quad (a \text{ 是任意常数})$$

情形 1)是充电过程，有

$$t = 0, \qquad U_C = 0$$

代入上式求得

$$a = -E$$

从而得充电规律

$$U_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

设 $t = t_1$ 时，$U_C = 5$，并将题设数据代入上式得

$$5 = 10(1 - e^{-t_1})$$

求得 $t_1 = \ln 2$，即经过时间 $t_1 = \ln 2$，电容 C 上的电压达到 $U_C =$ 5 伏.

对 2)是放电过程，当开关 K 合上“2”时回路中没有外接电

源，即外加电压为零，此时微分方程右端应为零，即

$$RC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}+U_C=0$$

通解为

$$U_C=be^{-\frac{1}{RC}t}\quad（b\ 为任意常数）$$

代入初始条件：$t=0$ 时，$u_C=E$，得 $b=E$，即放电的一般规律是

$$U_C=Ee^{-\frac{1}{RC}t}$$

设 $t=t_2$ 时，$U_C=5$，又代入题设数据，求得 $t_2=\ln 2$，即电容 C 充完电后开始放电，经 $t_2=\ln 2$ 时刻后 U_C 降到 5 伏.

第三章　一般理论

§3.1　毕卡逐次逼近法与存在惟一性定理

提　　要

定理1(解的存在惟一性定理)　如果方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

的右端函数 $f(x,y)$在闭矩形域

$$R:\ x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\quad y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b$$

上满足如下条件:

1) 在 R 上连续;

2) 在 R 上关于变量y 满足李普希兹(Lipschitz)条件, 即存在常数 L(称为李普希兹常数), 使得对于 R 上任何一对点(x,y)和$(x,\bar{y})$, 均有不等式:

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqslant L|y-\bar{y}|$$

则方程(1)满足初始条件

$$y(x_0)=y_0 \tag{2}$$

的惟一解 $y=\varphi(x)$至少在区间$[x_0-h_0,\ x_0+h_0]$上有定义,

其中 $h_0=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

定理 2(皮亚诺(Peano)解的存在性定理) 如果微分方程(1)的右端函数 $f(x,y)$在某区域 D 内连续, 任给点$(x_0,y_0)\in D$, 则初值问题(1), (2)的解在含 x_0 的某区间上存在.

题　解

【219】 试判断方程$\dfrac{dy}{dx}=x\tan y$ 在区域

1) R_1: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant \pi$;

2) R_2: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant \dfrac{\pi}{4}$

上是否满足解的存在惟一性定理的条件.

解 1) 不满足. 因为在区域 R_1 上, 方程右端函数 $f(x,y)=x\tan y$ 当 $y=\dfrac{\pi}{2}$时不连续.

2) 满足. 因为在区域 R_2 上,函数 $f(x,y)=x\tan y$ 连续且 $|f'_y(x,y)|=\left|\dfrac{x}{\cos^2 y}\right|\leqslant 2$ 有界.

【220】 判断下列方程在什么区域上保证初值解存在且惟一.

1) $y'=x+\sin y$;

2) $y'=x^{-\frac{1}{3}}$;

3) $y'=\sqrt{|y|}$;

4) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

解 1) 因为 $f(x,y)=x+\sin y$ 及$f'_y(x,y)=\cos y$ 在整个 xoy 平面上连续, 所以在整个 xoy 平面上满足存在惟一性定理条件. 进而在整个 xoy 平面上保证初值解存在且惟一.

2）因为方程右端函数 $f(x,y)=x^{-\frac{1}{3}}$ 在除去 y 轴外的整个 xoy 平面上连续且 $f'_y(x,y)=0$，所以在除去 y 轴外的整个 xoy 平面上初值解存在且惟一.

3）因为方程右端函数 $f(x,y)=\sqrt{|y|}=\begin{cases}\sqrt{y}, & y\geqslant 0\\ \sqrt{-y}, & y<0\end{cases}$

在整个 xoy 平面上连续，而 $f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y>0,\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-y}}, & y<0\end{cases}$ 在除去 x 轴外的整个 xoy 平面上连续，所以在除去 x 轴外的整个 xoy 平面上初值解存在且惟一.

4）该方程在除去直线 $x=y$ 的整个 xoy 平面上初值解存在且惟一.

【221】 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在怎样的区域中满足解的存在惟一性定理的条件，并求通过点(0,0)的一切解.

解 右端函数对 y 的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}y^{-\frac{2}{3}}$，显然它在任何一个不包含 x 轴($y=0$)上的点的有界闭区域中是有界的，因此在这种区域中解是存在惟一的. 即，只有通过 $y=0$ 上的点可能出现多个解的情况(方程右端的连续性保证在任何有界区域中，解是存在的).

原方程分离变量得

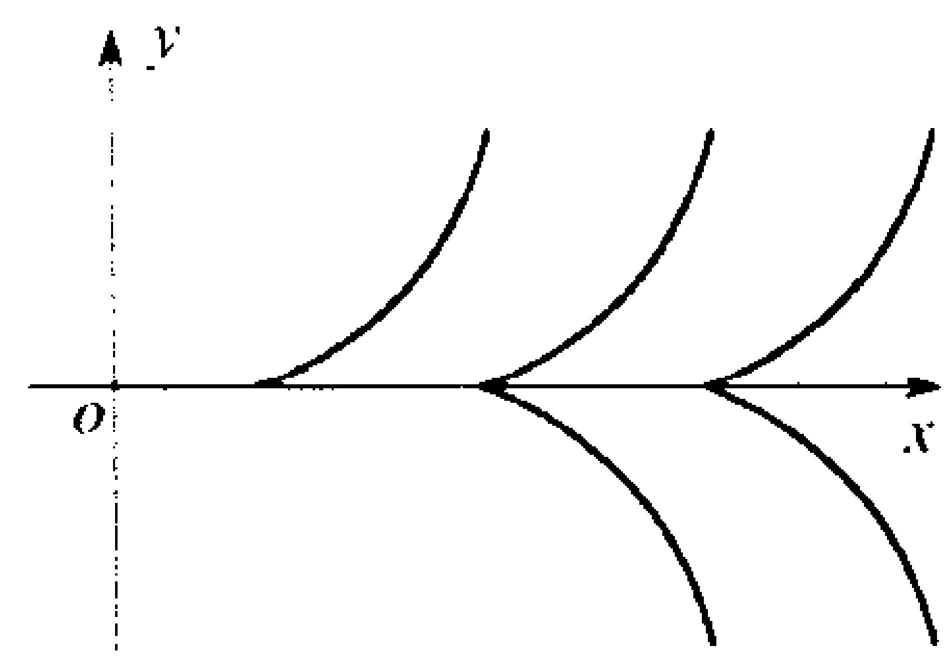
$$y^{-\frac{1}{3}}dy=\frac{3}{2}dx$$

上式两端取积分得

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}C$$

$$y=\pm(x-C)^{\frac{3}{2}}$$

其中 $x-C\geqslant 0$. 此外有特解 $y=0$. 因此过点(0,0)有无穷多个解(如图所示)



(第221题图)

$$y=0$$

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant C\\(x-C)^{\frac{3}{2}}, & x>C\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant C\\-(x-C)^{\frac{3}{2}}, & x>C.\end{cases}$$

【222】 在条形区域: $a\leqslant x\leqslant b$, $|y|<+\infty$内, 对任意的 $x_0\in[a,b]$, $y_0\in R$, 假设方程 $y'=f(x,y)$满足初始条件 $y(x_0)=y_0$的解存在且惟一, 若对其中任意两个解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_1(x_0)<y_2(x_0)$, 则必有

$$y_1(x)<y_2(x)$$

(其中 x 在$y_1(x)$, $y_2(x)$共同的存在区间内)

证 令

$$\varphi(x)=y_1(x)-y_2(x)$$

由于 $y_1(x_0)<y_2(x_0)$, 故有 $\varphi(x_0)=y_1(x_0)-y_2(x_0)<0$.

用反证法 若在 $y_1(x)$, $y_2(x)$共同的存在区间内 $y_1(x)<y_2(x)$不成立, 由于 $\varphi(x)$的连续性, 必存在点 $\bar{x}\in[a,b]$, 使得 $\varphi(\bar{x})=0$. 从而 $y_1(\bar{x})-y_2(\bar{x})=0$, 即 $y_1(\bar{x})=y_2(\bar{x})$. 这与假设矛盾, 故必有 $y_1(x)<y_2(x)$.

【223】 设 $f(x)$定义于$-\infty<x<+\infty$,满足条件

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2| \tag{1}$$

其中 $L<1$, 试证函数方程 $x=f(x)$存在惟一的解.

证 显然条件(1)保证了 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，任取一点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，作逼近序列$\{x_n\}$：

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad n=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

序列$\{x_n\}$的收敛等价于级数

$$x_0+\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-x_{k-1}) \tag{3}$$

的收敛. 由于

$$|x_1-x_0|=|f(x_0)-x_0|$$

$$|x_2-x_1|=|f(x_1)-f(x_0)|\leqslant L|x_1-x_0|$$

$$=L|f(x_0)-x_0|$$

由归纳法可知

$$|x_k-x_{k-1}|\leqslant L^{k-1}|f(x_0)-x_0|$$

由假设 $L<1$，所以级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}L^{k-1}|f(x_0)-x_0|$收敛. 由级数收敛的比较判别法知，级数(3)绝对收敛. 从而序列$\{x_n\}$也收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$，由 $f(x)$的连续性知，(2)式两端当 $n\to\infty$时取极限，即有

$$x^*=f(x^*)$$

即 x^*是函数方程 $x=f(x)$的解.

下证惟一性. 设 $x=f(x)$有两个解 x^*，$\bar{x}^*$，则

$$x^*=f(x^*),\qquad \bar{x}^*=f(\bar{x}^*)$$

由条件知

$$|x^*-\bar{x}^*|=|f(x^*)-f(\bar{x}^*)|\leqslant L|x^*-\bar{x}^*|$$

因为 $L<1$，即有

$$x^*=\bar{x}^*$$

所以 $x=f(x)$存在惟一解.

【224】 证明贝尔曼(Bellman)不等式. 设 k 为非负常数, $f(t)$和 $g(t)$是区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的非负连续函数, 且满足不等式

$$f(t)\leqslant k+\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s,\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

则有

$$f(t)\leqslant k\exp\left(\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

证 1) $k>0$ 时, 令

$$w(t)=k+\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s$$

则 $w'(t)=f(t)g(t)\leqslant g(t)w(t)$, 由 $w(t)>0$ 可得

$$\frac{w'(t)}{w(t)}\leqslant g(t)$$

两边从 α 到 t 积分得

$$\ln w(t)-\ln w(\alpha)\leqslant\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s$$

即有

$$\frac{w(t)}{w(\alpha)}\leqslant\exp\left(\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right)$$

$w(\alpha)=k>0$ 所以

$$w(t)\leqslant k\exp\left(\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right)$$

即有

$$f(t)\leqslant w(t)\leqslant k\exp\left(\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

2) $k=0$ 时,对任意 $\varepsilon>0$,由于 $f(t)\leqslant\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s$,所以

$f(t)\leqslant\varepsilon+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$. 由 1)，有 $f(t)\leqslant\varepsilon\exp\left(\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s\right)$.
当 $\varepsilon\to0^+$ 时，有 $f(t)\leqslant0$. 因为 $f(t)\geqslant0$，即得 $f(t)\equiv0$. 从而

$$f(t)\leqslant k\cdot\exp\left(\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s\right),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

由 1),2)知，不等式成立. 证毕.

【225】 设 $x(t)$与 $f(t)$是 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的连续函数. 若

$$|x(t)|\leqslant k+M\int_\alpha^t |x(s)|\cdot|f(s)|\mathrm{d}s,\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta \quad (1)$$

其中 M,k 是非负常数，则

$$|x(t)|\leqslant k\exp\left(M\int_\alpha^t |f(s)|\mathrm{d}s\right),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

证 在上题中，$f(t)=|x(t)|$，$g(t)=M|f(t)|$在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上是非负连续函数，即得

$$|x(t)|\leqslant k\exp\left(M\int_\alpha^t |f(s)|\mathrm{d}s\right),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

由 1),2)知，不等式成立.

【226】 试用贝尔曼不等式证明定理 1(解的存在惟一性定理)中的惟一性部分.

证 设 $\varphi(t)$，$\psi(t)$是初值问题

$$x'=f(t,x),\qquad x(t_0)=x_0$$

的两个解，则有

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi$$

$$\psi(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(\xi,\psi(\xi))\mathrm{d}\xi$$

于是，

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant L\int_{t_0}^{t}|\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

其中 L 为李普希兹常数. 由贝尔曼不等式知

$$0\leqslant|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant 0$$

因而有

$$\varphi(t)\equiv\psi(t).$$

【227】 证明推广的贝尔曼不等式. 若 $\alpha(t)$, $\varphi(t)$是$[a,b]$上的连续函数, $\beta(t)\geqslant 0$ 是$[a,b]$上的可积函数, 且满足

$$\varphi(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\varphi(s)\mathrm{d}s,\quad a\leqslant t\leqslant b$$

则

$$\varphi(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)\left[\exp\int_s^t\beta(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s,\quad a\leqslant t\leqslant b$$

证 令

$$R(t)=\int_a^t\beta(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

则除去一个测度为零的集外, 有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\beta(t)\varphi(t)\leqslant\beta(t)\alpha(t)+\beta(t)R(t)$$

移项后两边乘以 $\exp\left(-\int_a^t\beta(u)\mathrm{d}u\right)$ 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}-\beta(t)R(t)\right)\exp\left(-\int_a^t\beta(u)\mathrm{d}u\right)$$

$$\leqslant\beta(t)\alpha(t)\exp\left(-\int_a^t\beta(u)\mathrm{d}u\right)$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\left(-\int_a^t\beta(u)\mathrm{d}u\right)R(t)\right]$$

$$\leqslant\left[\exp\left(-\int_a^t\beta(u)\mathrm{d}u\right)\right]\beta(t)\alpha(t)$$

上式两端从 a 到 t 积分得

$$\left[\exp\left(\int_a^t(-\beta(u))\mathrm{d}u\right)\right]R(t)$$

$$\leqslant\int_a^t\left[\exp\left(-\int_a^s\beta(u)\mathrm{d}u\right)\right]\beta(s)\alpha(s)\mathrm{d}s$$

于是有

$$R(t)\leqslant\int_a^t\left(\exp\int_s^t\beta(u)\mathrm{d}u\right)\beta(s)\alpha(s)\mathrm{d}s$$

从而得

$$\varphi(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)\left[\exp\int_s^t\beta(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s,\quad a\leqslant t\leqslant b$$

证毕.

【228】 设 $f(x,y)$，$g_n(x,y)$在闭矩形 $\bar{R}$：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$ 上连续，且关于 y 满足李普希兹条件(李普希兹常数为 L)．又在 $\bar{R}$ 上一致地成立关系式 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x,y)=0$．$\varphi_n(x)$表示方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)+g_n(x,y)$$

的满足 $\varphi_n(x_0)=y_0$ 的解，$\varphi(x)$表示方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

的满足 $\varphi(x_0)=y_0$ 的解，且 $\varphi(x)$在闭区间 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上存在．试用贝尔曼不等式证明：当 n 充分大时，$\varphi_n(x)$在闭区间 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上存在，且在 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$

上一致地成立关系式

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x).$$

证　1) 先证 $\varphi_n(x)$在 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上存在. 因解 $y=\varphi(x)$在 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上存在. 取区域

$$D_1:\ x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h,\ |y-\varphi(x)|\leqslant C$$

使 D_1 整个包含在矩形 $\bar{R}$ 中.

由于 $g_n(x,y)$一致地趋于 0，所以对任意 $0<\varepsilon<C$，存在 N，使 $n>N$ 时，有 $|g_n(x,y)|<\frac{\varepsilon}{h}e^{-Lh}$.

下证当 $n>N$ 时，$\varphi_n(x)$在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上存在. 用反证法. 若 $\varphi_n(x)$仅在$[x_0,\bar{x})$上存在，且 $x\to\bar{x}-0$ 时，$(x,\varphi_n(x))$将无限接近区域 D_1 的边界($\bar{x}<x_0$ 时可类似证明). 由连续性即有 $|\varphi_n(\bar{x})-\varphi(\bar{x})|=C$. 由定义，$\varphi(x)$和 $\varphi_n(x)$分别满足积分方程

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi_n(\tau))\mathrm{d}\tau+\int_{x_0}^{x}g_n(\tau,\varphi_n(\tau))\mathrm{d}\tau$$

当 $x\in[x_0,\bar{x}]$时，

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\tau,\varphi_n(\tau))-f(\tau,\varphi(\tau))|\mathrm{d}\tau\right|\\&\quad+\left|\int_{x_0}^{x}g_n(\tau,\varphi_n(\tau))\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant\int_{x_0}^{x}L|\varphi_n(\tau)-\varphi(\tau)|\mathrm{d}\tau+\varepsilon h\frac{e^{-Lh}}{h}\end{aligned}$$

由贝尔曼不等式知

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon he^{L(x-x_0)}\cdot\frac{e^{-Lh}}{h}\leqslant\varepsilon\tag{1}$$

特别当 $x=\bar{x}$ 时，有 $|\varphi_n(\bar{x})-\varphi(\bar{x})|\leqslant\varepsilon<C$ 与假设 $|\varphi_n(\bar{x})-\varphi(\bar{x})|=C$ 矛盾. 因而 $\varphi_n(x)$在$|x-x_0|\leqslant h$ 上存在.

2）下证$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$在闭区间$[x_0-h, x_0+h]$一致成立. 任给 $\varepsilon>0$，由于 $g_n(x,y)$一致趋于 0，所以存在 N，使当 $n>N$ 时，有

$$|g_n(x,y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{h}e^{-Lh}$$

那么对 $x\in[x_0-h,x_0+h]$，当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\tau,\varphi_n(\tau))-f(\tau,\varphi(\tau))|\mathrm{d}\tau\right|\\&\quad+\left|\int_{x_0}^{x}|g_n(\tau,\varphi_n(\tau))|\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}L|\varphi_n(\tau)-\varphi(\tau)|\mathrm{d}\tau\right|+\varepsilon h\cdot\frac{e^{-Lh}}{h}\end{aligned}$$

由贝尔曼不等式即得

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon h\frac{e^{-Lh}}{h}e^{L|x-x_0|}<\varepsilon,$$

$$x\in[x_0-h,x_0+h]$$

因而，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$在$[x_0-h,x_0+h]$一致成立. 证毕.

【229】 设函数 $f(x,y)$在(x_0,y_0)的邻域内是 y 的不增函数，试证初值问题

$$y'=f(x,y),\qquad y(x_0)=y_0$$

的右行解$(x\geqslant x_0)$至多只有一个.

证 设初值问题存在两个解 $x=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$，要证当 $x\geqslant x_0$ 时，有 $\varphi(x)\triangleq\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\equiv0$. 用反证法. 若 $\varphi(x)\not\equiv0$ $(x>x_0)$，即存在 $x_1>x_0$，使得 $\varphi(x_1)\neq0$. 不妨设

$\varphi(x_1)>0$. 由 $\varphi(x)$ 的连续性及 $\varphi(x_0)=0$, 知存在 $\bar{x}_0$, $x_0\leqslant\bar{x}_0<x_1$, 使得

$$\varphi(\bar{x}_0)=0 \quad 及 \quad \varphi(x)>0, \qquad \bar{x}_0<x\leqslant x_1$$

则有

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\\&=\int_{\bar{x}_0}^{x}[f(x,\varphi_1(x))-f(x,\varphi_2(x))]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 $\bar{x}_0<x\leqslant x_1$. 由 $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)>0$ $(\bar{x}_0<x\leqslant x_1)$ 及 $f(x,y)$对 y 的单调不增性, 知

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\int_{\bar{x}_0}^{x}[f(x,\varphi_1(x))-f(x,\varphi_2(x))]\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

$$\bar{x}_0<x\leqslant x_1$$

这与 $\varphi(x_1)>0$ 矛盾. 因此, 对 $x\geqslant x_0$, 有 $\varphi(x)\equiv 0$. 证毕.

【230】 设 $f(x,y)$在区域 R: $0\leqslant x\leqslant a$, $|y|\leqslant b$ 上连续. $f(x,y)$关于 y 是非减的且满足$f(x,0)\geqslant 0$, 当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时, 试用逐次逼近法证明: 初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \qquad y(0)=0$$

的解在 $0\leqslant x\leqslant h_0$ 上存在, 其中 $h_0=\min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

证 初值问题的等价积分方程是

$$y(x)=\int_0^x f(s,y(s))\mathrm{d}s$$

作逐次逼近序列

$$y_0(x)=0$$

$$y_1(x)=\int_0^x f(s,0)\mathrm{d}s$$

$$y_2(x)=\int_0^x f(s,y_1(s))\mathrm{d}s$$

……

$$y_n(x)=\int_0^x f(s,y_{n-1}(s))\mathrm{d}s \tag{1}$$

……

由 $|y_1(x)|\leqslant\int_0^x|f(s,0)|\mathrm{d}s\leqslant Mh_0\leqslant b$，$0\leqslant x\leqslant h_0$ 及归纳法，对一切 n 有

$$|y_n(x)|\leqslant\int_0^x|f(s,y_{n-1}(s))|\mathrm{d}s\leqslant Mh_0\leqslant b,$$

$$0\leqslant x\leqslant b$$

故，当 $0\leqslant x\leqslant h_0$ 时，$(x,y_n(x))\in R$，$n=0,1,2,\cdots$. 又由假设，当 $0\leqslant x\leqslant h_0$ 时有

$$y_1(x)=\int_0^x f(s,0)\mathrm{d}s\geqslant 0=y_0(x)$$

$$y_2(x)-y_1(x)=\int_0^x[f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))]\mathrm{d}s\geqslant 0$$

……

$$y_{n+1}(x)-y_n(x)=\int_0^x[f(s,y_n(s))-f(s,y_{n-1}(s))]\mathrm{d}s\geqslant 0$$

……

由归纳法知

$$0=y_0(x)\leqslant y_1(x)\leqslant y_2(x)\leqslant\cdots\leqslant y_n(x)\leqslant\cdots,$$

$$0\leqslant x\leqslant h_0$$

因为单调有界序列必有极限，即有

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y(x),\quad 0\leqslant x\leqslant h_0$$

由 $f(x,0)\geqslant 0$ 及 $f(x,y)$ 关于 y 是非减的，知 $y_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$是单调不减的，即有 $y_n(x)\leqslant y_n(h_0)$. 由此知在

$[0,h_0]$上 $y_n(x)$一致收敛于 $y(x)$. 由 f 的连续性易证

$$\lim_{n\to\infty} f(x, y_n(x)) = f(x, y(x))$$

在$[0,h_0]$上也是一致成立的. 对积分方程(1)两边取极限，即得

$$y(x) = \int_0^x f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

由此证明了在$[0,h_0]$上初值问题的解的存在性.

【231】 设函数 $f(x,y)$在 $a\leqslant x\leqslant b$，$-\infty<y<\infty$上关于 x 连续，而它关于 y 的偏导数处处存在，且 $0<m\leqslant f'_y\leqslant M$. 试用逐次逼近法证明：在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上存在惟一连续函数 $y=\varphi(x)$满足方程 $f(x,y)=0$.

证 取

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0(x) - \frac{f(x, y_1(x))}{M+1}$$

……

$$y_n(x) = y_{n-1}(x) - \frac{f(x, y_{n-1}(x))}{M+1} \tag{1}$$

……

显然 $y_n(x)$在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上存在且连续. 下面再证明函数列$\{y_n(x)\}$在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛. 考虑级数

$$y_1(x) + [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \cdots \tag{2}$$

因为 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$，$-\infty<y<+\infty$ 上存在且 $0<m\leqslant\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\leqslant M$对任意的 $n\geqslant 2$，

$$y_n - y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2} - \frac{1}{M+1}[f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})]$$

$$= y_{n-1} - y_{n-2} - \frac{f'_y(x,\xi)}{M+1}(y_{n-1} - y_{n-2})$$

$$= \left(1 - \frac{f'_y(x,\xi)}{M+1}\right)(y_{n-1} - y_{n-2})$$

（ξ 在 y_{n-1}，y_{n-2}之间）

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant \left(1 - \frac{m}{M+1}\right)|y_{n-1} - y_{n-2}| \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

于是由递推关系得

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant \left(1 - \frac{m}{M+1}\right)^{n-1}|y_1 - y_0| \tag{3}$$

因为$\left(1 - \frac{m}{M+1}\right) < 1$，由(3)式知级数(2)在$[a, b]$上绝对收敛. 因此函数列 $\{y_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = \varphi(x)$(1)式两边取极限得

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{f(x, \varphi(x))}{M+1}$$

即有 $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$. 这就证明了 $f(x, y) = 0$ 在$[a, b]$上存在一个连续解 $y = \varphi(x)$.

再证惟一性. 若 $f(x, y) = 0$ 在$[a, b]$上存在两个解 $y = \varphi(x)$，$y = \psi(x)$则

$$0 = f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) = (\varphi(x) - \psi(x))f'_y$$

由于$f'_y > 0$，即知在$[a, b]$上 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. 证毕.

【232】 给定积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1}$$

其中 $f(x)$是$[a, b]$上的已知连续函数，$K(x, \xi)$是$a \leqslant x \leqslant b$，

$a\leqslant\xi\leqslant b$上的已知连续函数. 证明：当$|\lambda|$足够小时(λ是常数)，(1)在$[a,b]$上存在惟一的连续解.

证 作逐次逼近序列,取

$$\varphi_0(x)=f(x)$$

令

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_b^a K(x,\xi)\varphi_0(\xi)\mathrm{d}\xi$$

……

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_b^a K(x,\xi)\varphi_n(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2}$$

……

令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, $L=\max\limits_{\substack{x\in[a,b]\\ \xi\in[a,b]}}|K(x,\xi)|>0$

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| &= \left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\\ &\leqslant|\lambda|\int_a^b|K(x,\xi)||f(\xi)|\mathrm{d}\xi\\ &\leqslant|\lambda|ML(b-a)\end{aligned}$$

假设$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant|\lambda|^kL^kM(b-a)^k$成立，则有

$$\begin{aligned}&|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|\\ =&\left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)(\varphi_k(\xi)-\varphi_{k-1}(\xi))\mathrm{d}\xi\right|\\ \leqslant&|\lambda|\int_a^b|K(x,\xi)||\varphi_k(\xi)-\varphi_{k-1}(\xi)|\mathrm{d}\xi\\ \leqslant&|\lambda|\int_a^b L^{k+1}|\lambda|^kM(b-a)^k\mathrm{d}\xi\\ =&|\lambda|^{k+1}L^{k+1}M(b-a)^{k+1}\end{aligned}$$

由归纳法知，对任意的$n\in\mathbf{N}$，有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant ML^n|\lambda|^n(b-a)^n$$

下证$\{\varphi_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛. 考虑级数

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)) \tag{3}$$

该级数的前 n 项和为

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x))=\varphi_n(x)$$

所以要证序列$\{\varphi_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛，只须证级数(3)在$[a,b]$上一致收敛即可. 由于

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant ML^k|\lambda|^k(b-a)^K$$

当$|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$时，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}ML^k|\lambda|^k(b-a)^k$$

收敛，由此知当$|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$时，级数(3)在$[a,b]$上一致收敛. 设极限函数为 $\varphi^*(x)$，即 $x\in[a,b]$时，当 $n\to\infty$时，$\varphi_n(x)$一致收敛于 $\varphi^*(x)$，且由 $\varphi_n(x)$的连续性知 $\varphi^*(x)$在$[a,b]$上连续. 对迭代列(2)，当 $n\to\infty$时两边取极限，得

$$\varphi^*(x)=f(x)+\lambda\int_b^a K(x,\xi)\varphi^*(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\left(|\lambda|<\frac{1}{(b-a)L}\right)$$

这就证明了当$|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$时，积分方程必存在连续解.

下证当$|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$时，(1)的解的惟一性. 用反证法. 设另有解 $\overline{\varphi}(x)$且 $\overline{\varphi}(x)\neq\varphi^*(x)$，即

$$\overline{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\overline{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

记 $Q=\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi^*(x)-\overline{\varphi}(x)|>0$,

$$\begin{aligned}|\varphi^*(x)-\overline{\varphi}(x)|&=\left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)(\varphi^*(\xi)-\overline{\varphi}(\xi))\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant|\lambda|\int_a^b L|\varphi^*(\xi)-\overline{\varphi}(\xi)|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant|\lambda|QL(b-a)\end{aligned}$$

即有 $Q\leqslant|\lambda|QL(b-a)$, 由于 $Q>0$, 所以 $|\lambda|\geqslant\dfrac{1}{(b-a)L}$, 与 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 矛盾. 惟一性得证.

§3.2 初值问题的近似计算和误差估计

提　要

定义　函数 $\varphi_n(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi_{n-1}(s))\mathrm{d}s$ (其中 $\varphi_0(x)=y_0$)称为初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\qquad \varphi(x_0)=y_0$$

的第 n 次近似解.

公式　$|\varphi(x)-\varphi_n(x)|\leqslant\dfrac{M(Lh_0)^{n+1}}{L(n+1)!}$

此为区间 $|x-x_0|\leqslant h_0$ 上, 用 n 次近似 $\varphi_n(x)$ 来逼近精确解 $\varphi(x)$ 时的误差估计式. 其中 h_0,M 同§3.1中的定理1, L 为李普希兹常数.

题　解

【233】 试用逐次逼近法求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y^2$ 满足初始条件

$y(0)=0$ 的近似解：$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\varphi_3(x)$.

解 $\varphi_0(x)=y(0)=0$

$$\varphi_1(x)=0+\int_0^x (s-0)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}x^2$$

$$\varphi_2(x)=0+\int_0^x \left[s-\left(\frac{1}{2}s^2\right)^2\right]\mathrm{d}s=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5$$

$$\varphi_3(x)=0+\int_0^x \left[s-\left(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{20}s^5\right)^2\right]\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8-\frac{1}{4400}x^{11}.$$

【234】 利用逐次逼近法，求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2-x^2$适合初值条件 $y(0)=1$ 的近似解：$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$.

解 零次近似解为 $\varphi_0(x)=y(0)=1$

一次近似解为

$$\varphi_1(x)=1+\int_0^x (1-s^2)\mathrm{d}s=1+x-\frac{1}{3}x^3$$

二次近似解为

$$\varphi_2(x)=1+\int_0^x \left[\left(1+s-\frac{1}{3}s^3\right)^2-s^2\right]\mathrm{d}s$$

$$=1+x+x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{63}x^7.$$

【235】 证明解的存在惟一性定理中的第 n 次近似解 $\varphi_n(x)$与精确解 $\varphi(x)$有如下误差估计式：

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \tag{1}$$

其中 L 是李普希兹常数，M 是 $|f(x,y)|$ 在 R：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$ 上的上界.

证 由 $\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s$ 及迭代列

$$\varphi_0(x)=y_0,\quad \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_{n-1}(s))\mathrm{d}s$$

$$n=1,2,\cdots$$

得

$$|\varphi(x)-\varphi_0(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi(s))|\mathrm{d}s\right|\leqslant M|x-x_0|$$

设

$$|\varphi(x)-\varphi_k(x)|\leqslant\frac{ML^k}{(k+1)!}|x-x_0|^{k+1}$$

则

$$|\varphi(x)-\varphi_{k+1}(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi(s))-f(s,\varphi_k(s))|\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant\frac{ML^k}{(k+1)!}\left|\int_{x_0}^{x}|s-x_0|^{k+1}\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant\frac{ML^{k+1}}{(k+2)!}|x-x_0|^{k+2}$$

由归纳法知，对任意 n 次近似解，估计式(1)成立.

【236】 求初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-y^2,\qquad y(-1)=0$$

在区域 R: $|x+1|\leqslant1$, $|y|\leqslant1$ 的解的定义区间，并求第二次近似解，给出在存在区间上解的误差估计.

解 1) 由存在惟一性定理知，解的定义区间为

$$|x+1|\leqslant h_0$$

其中 $h_0=\min(a,\frac{b}{M})$, $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|x^2-y^2|=4$. 这里 $a=1$, $b=1$. 从而 $h_0=\frac{1}{4}$，即得解的定义区间为 $|x+1|\leqslant\frac{1}{4}$.

2) 求初值问题的二次近似解

$$y_0(x)\equiv y(-1)=0$$

$$y_1(x)=\int_{-1}^{x}[s^2-y_0^2(s)]\mathrm{d}s=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}$$

则二次近似解为

$$y_2(x)=\int_{-1}^{x}[s^2-y_1^2(s)]\mathrm{d}s=\int_{-1}^{x}\left[s^2-\left(\frac{s^3}{3}+\frac{1}{3}\right)^2\right]\mathrm{d}s$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{63}-\frac{x^4}{18}-\frac{x}{9}+\frac{11}{42}.$$

3）由误差估计公式

$$|y_n(x)-y(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

其中 L 是李普希兹常数. 因为 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|2y|\leqslant 2$，可取 $L=2$，则有

$$|y_2(x)-y(x)|\leqslant\frac{4\cdot 2^2}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{24}$$

即第二次近似解在存在区间上的误差不超过$\frac{1}{24}$.

§3.3 解的延展

提　要

定义 1　设 $y=\varphi(x)$是初值问题

$$y'=f(x,y),\qquad y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

定义在区间$[a,b]$(或(a,b))上的一个解. 若这个初值问题存在一个解 $y=\psi(x)$，它在区间$[a,\beta]$(或(a,β))上定义，并且$\beta>b$,当 $x\in[a,b]$(或(a,b))时，$\psi(x)\equiv\varphi(x)$，则称解

$y=\varphi(x)$是可以向右延展的，即把解的定义区间由$[a,b]$(或(a,b))向右延展到$[a,\beta]$(或(a,β)). 类似地，可以给出向左延展的概念，我们也称 $y=\psi(x)$是解 $y=\varphi(x)$的延展.

定义 2　如果 $y=\varphi(x)$是初值问题(1)的定义在某区间上的一个解，它不能再向左、右延展，这样的解称为(1)的一个饱和解. 饱和解的定义区间称为它的(最大)存在区间.

定义 3　称函数 $f(x,y)$关于 y 满足局部李普希兹条件，如果对于区域 G 内的每一点，有以这点为中心的完全含于 G 内的闭矩形R 存在，在 R 上$f(x,y)$关于 y 满足李普希兹条件(对不同的点,域 R 的大小和常数L 可能不同).

定理 1(延展定理)　如果方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$的右端函数 $f(x,y)$在(有界或无界)区域 D 上连续，且关于 y 满足局部李普希兹条件，则对于 D 上任意一点(x_0,y_0)，初值问题(1)的解 $\varphi(x)$均可向左、右延展而得到最大存在区间为(α,β)的饱和解 $y=\varphi^*(x)$，且当 $x\to\beta-0$(或 $x\to\alpha+0$)时，积分曲线上的点$(x,\varphi^*(x))$将无限接近区域 D 的边界∂D.

推论 1　若 $f(x,y)\in C(D)$，D: $a<t<b$，$|y|<\infty$(允许 $a=-\infty$，$b=+\infty$)，则初值问题(1)的饱和解 $y=y(x)$的存在区间(α,β)必属于下列情形之一：

1) $\alpha=a(\beta=b)$

2) $\alpha<a$ $(\beta<b)$，但当 $x\to\alpha+0$ $(x\to\beta-0)$时

$$\lim|y(x)|=\infty$$

定理 2(第一比较定理)　设函数 $f(x,y)$，$F(x,y)$都在平面区域 D 上连续，且有不等式 $f(x,y)<F(x,y)$ $(x,y)\in D$ 成立，则方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$的满足初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的解

$\varphi(x)$和方程$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$的满足同一初始条件 $\Phi(x_0)=y_0$ 的解 $\Phi(x)$在它们共同存在的区间上，满足不等式：

$$\varphi(x)<\Phi(x), \quad 当 x>x_0 时,$$

$$\varphi(x)>\Phi(x), \quad 当 x<x_0 时.$$

题　解

【237】 设 $f(x,y)$在整个 xoy 平面上连续可微，$f(x,y_0)\equiv 0$求证：若方程 $y'=f(x,y)$的非常数解 $y=\varphi(x)$满足$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0$，则 x_0 非有限.

证 用反证法. 假设 x_0 有限，取 $x_1<x_0$，令 $\varphi(x_1)=y_1$，则 $y=\varphi(x)$是下述初值问题的解

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \qquad y(x_1)=y_1$$

且有 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0$，由于 $\varphi(x)$的连续性，得 $\varphi(x_0)=y_0$，因为 $f(x,y_0)\equiv 0$，所以 $y\equiv y_0$ 是原方程的常数解.

由于 $f(x,y)$在全平面上连续可微，故在(x_0,y_0)附近，方程 $y'=f(x,y)$的解存在且惟一，即存在 $h>0$，h 适当小，使在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上解存在惟一. 但现在过(x_0,y_0)有两条积分曲线：$y=y_0$ 及 $y=\varphi(x)$，$x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$. 由解的惟一性知，$\varphi(x)\equiv y_0$，$x\in[x_0-h,x_0+h]$，这与 $y=\varphi(x)$是非常数解矛盾. 因此 x_0 非有限.

【238】 试证明：对任意的 x_0 及满足条件 $0<y_0<1$ 的 y_0，方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$的满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$上存在.

证 因为 $f(x,y)=\dfrac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$ 及

$$f'_y(x,y)=\frac{(2y-1)(1+x^2+y^2)-2y^2(y-1)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

在整个 xoy 平面上连续，从而 $f(x,y)$ 在 xoy 平面上满足局部李普希兹条件，所以方程在整个 xoy 平面上满足存在惟一性定理及延展定理的条件.

显然，$y=0$，$y=1$ 均是该方程在 $(-\infty,+\infty)$ 上的解，对区域 R：$|x|<+\infty$，$0<y<1$ 内任一点 (x_0,y_0)，方程满足 $y(x_0)=y_0$ 的解存在惟一，由延展定理知，它可以向左、右延展，但不能与 $y=0$，$y=1$ 两直线相交. 因而解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

【239】 指出方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-y^2)e^{xy^2}$ 的每一个解的最大存在区间，以及当 x 趋于这区间的两端点时解的性状.

解 因 $f(x,y)=(1-y^2)e^{xy^2}$ 在整个 xoy 平面上连续可微，所以对任意初始点 (x_0,y_0)，方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解存在惟一，且 $y=\pm1$ 显然是方程的解.

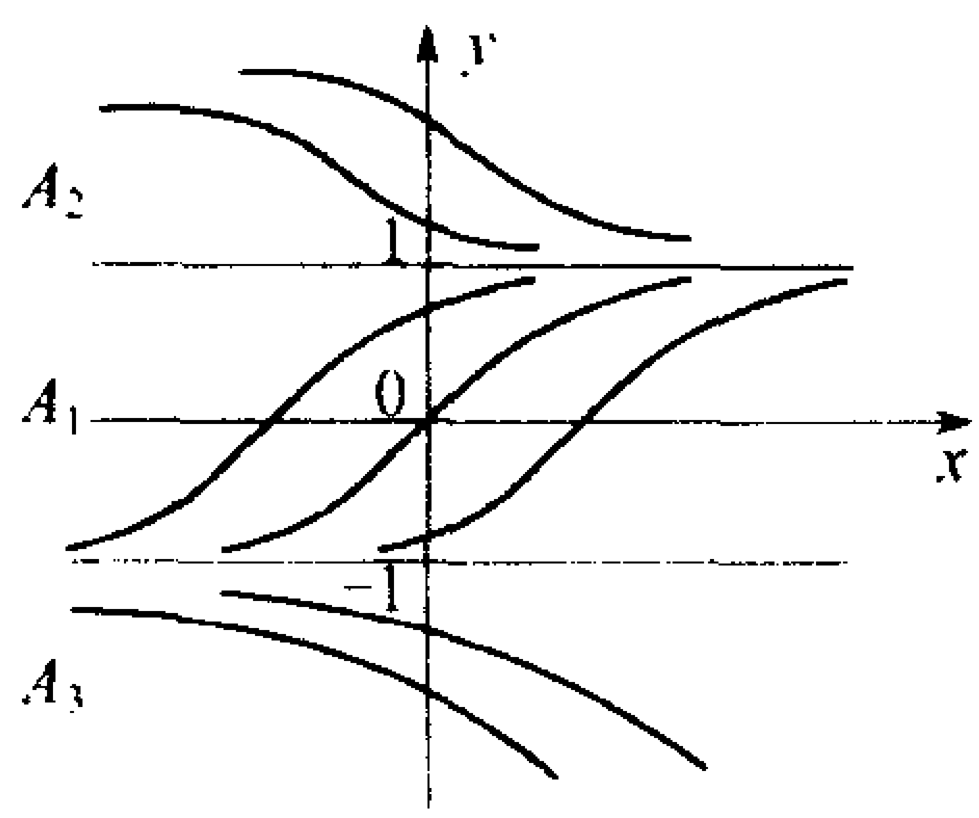
现以 $y=1$，$y=-1$ 为界将整个 xoy 平面分为三个区域来进行讨论.

(1) 在区域 A_1：$-1<y<1$，$-\infty<x<+\infty$ 中. 由于 $f(x,y)>0$，则对任意初始点 $(x_0,y_0)\in A_1$，方程满足初始条件的解 $y=\varphi(x)$ 递增，其存在区间为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $x\to-\infty$ 时，以 $y=-1$ 为渐近线；当 $x\to+\infty$ 时，以 $y=1$ 为渐近线.

(2) 在区域 A_2：$y>1$，$-\infty<x<+\infty$ 中. 由于 $f(x,y)<0$，对任意初始点 $(x_0,y_0)\in A_2$，方程满足初始条件

$y(x_0)=y_0$的解 $y=\varphi(x)$递减，其存在区间为$(-\infty,+\infty)$，当 $x\to-\infty$时，$\varphi'(x)\to0$；当 $x\to+\infty$时，以$y=-1$为渐近线.

(3) 在区域 A_3：$y<-1$，$-\infty<x<+\infty$ 中. 由于$f(x,y)<0$,在该区域的任意解 $y=\varphi(x)$递减，其存在区间为$-\infty<x<+\infty$. 当 $x\to-\infty$时，以 $y=-1$ 为渐近线；当$x\to+\infty$时，$\varphi'(x)\to-\infty$. 其积分曲线分布如图.



(第 239 题图)

【240】 讨论方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-1}{2}$满足初始条件 $y(0)=0$ 的饱和解，以及满足 $y(\ln2)=-3$ 的饱和解的存在区间.

解 显然 $y=\pm1$ 均为方程的解，当 $y\neq\pm1$ 时，将方程分离变量并积分，得它的通解为

$$y=\frac{1+Ce^x}{1-Ce^x}$$

将初始值 $y(0)=0$ 代入通解得 $C=-1$. 从而得方程满足$y(0)=0$的解为 $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$. 它的存在区间为$(-\infty,+\infty)$，而且

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x}=-1$$

方程满足 $y(\ln 2)=-3$ 的解为 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$，它的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 由于 $x=\ln 2\in(0,+\infty)$，故方程满足条件 $y(\ln 2)=-3$ 的解的存在区间为$(0,+\infty)$. 由解的表达式知

$$\lim_{x\to 0}y(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=-1.$$

【241】 设 $f(x,y)$和$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$在带形域$D$: $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, $-\infty<y<+\infty$内是连续的，并且对于任何$[a,b]\subset(\alpha,\beta)$，存在 $L>0$，使$\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant L$ $(a\leqslant x\leqslant b,\ -\infty<y<+\infty)$. 试证微分方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$的每一个解的最大存在区间是$[\alpha,\beta]$.

证 任意取$(x_0,y_0)\in D$，由题意知，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{1}$$

的局部解存在惟一. 因为对任意 $\varepsilon>0$,区间$[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon]\subset(\alpha,\beta)$. 由

$$(x,y)\in D_1\triangleq\{(x,y)\mid\alpha+\varepsilon\leqslant x\leqslant\beta-\varepsilon,\ -\infty<y<+\infty\},$$

$\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant L$, 因而 $f(x,y)$在 D_1 内满足李普希兹条件，即对任意$(x,y_1),(x,y_2)\in D_1$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|\tag{2}$$

对 $x\in[a,b]$，作逐次迭代

$$y_1(x)=y_0$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\mathrm{d}s \quad (n = 2,3,\cdots)$$

由条件(2)易得估计式

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant\frac{L^{n-1}(x-x_0)^{n-1}}{n!}$$

因而级数

$$y_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(y_n(x)-y_{n-1}(x)) \tag{3}$$

在$[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon]$上绝对一致收敛. 由此知连续函数列$\{y_n(x)\}$在$[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon]$上一致收敛于初值问题(1)的解 $y(x)$, 即$y(x)$的定义区间为$[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon]$. 当 $\varepsilon\to0$ 时, 即知 $y(x)$的存在区间为(α,β), 由 $f(x,y)$在带形域 D 内连续知, 当 $x\to\alpha+0$ 或 $x\to\beta-0$时, $y(x)$趋向有限值, 在 $x=\alpha,\beta$ 对$y(x)$补充定义即知, $y(x)$的最大存在区间为$[\alpha,\beta]$.

【242】 线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$, $p(x),q(x)$在区间$[a,b]$上连续, 试证该方程的任一解均在$[a,b]$上有定义.

证 因为 $f(x,y)=-p(x)y+q(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-p(x)$. 当 $x\in[a,b]$, $|y|<\infty$时, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant\max\limits_{x\in[a,b]}|p(x)|=L$. 由上题知该方程的任一解均在$[a,b]$上存在.

【243】 设 $f(x,y)$在整个平面上连续有界, 且$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$也是连续的. 试证方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

的每一个解 $y=\varphi(x)$ 在整个实轴 $(-\infty,+\infty)$ 上存在.

证　设 $y=\varphi(x)$ 是(1)的解，$y_0=\varphi(x_0)$. 由于 $f(x,y)$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在整个 xoy 平面上连续，从而在任一含 (x_0,y_0) 的有界闭域 D 上 $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$ 有界，即得 $f(x,y)$ 关于 y 在闭域 D 上满足李普希兹条件，所以方程(1)满足初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的局部解 $y=\varphi(x)$ 存在惟一，且满足定理 1(延展定理)的条件.

下证 $y=\varphi(x)$ 的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$. 用反证法. 假设方程(1)满足 $y(x_0)=y_0$ 的饱和解(仍记作 $y=\varphi(x)$)的存在区间为 (α,β)，若 $\alpha>-\infty$，$\beta<+\infty$，则对 $x\in(\alpha,\beta)$，有

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s$$

由 $f(x,y)$ 的有界性知 $x\to\alpha+0$.（或 $x\to\beta-0$）时，$|\varphi(x)|\not\to\infty$，与推论 1 矛盾，因而，$y=\varphi(x)$ 的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

【244】　设 $f(x,y)$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在全平面上是连续的，并且 $|f(x,y)|\leqslant A+B|y|$，其中 A,B 是常数且 $A>0$，$B>0$，试证微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{1}$$

的任一解 $y=\varphi(x)$ 在整个实轴 $(-\infty,+\infty)$ 上存在.

证　对(1)的任一解 $y=\varphi(x)$，设 $y_0=\varphi(x_0)$. 因为 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在任一含 (x_0,y_0) 的有界闭域 D 上连续，所以方程(1)的初值问题在 D 域上满足解的存在惟一性定理的

条件，从而知方程(1)满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $\varphi(x)$ 存在惟一，且方程(1)也满足延展定理的条件. 将 $y=\varphi(x)$ 延展后的饱和解仍记为 $y=\varphi(x)$.

下证 $\varphi(x)$ 延展后的饱和解的最大存在区间为 $(-\infty,+\infty)$. 用反证法. 设饱和解 $y=\varphi(x)$ 的最大存在区间是 (α,β)，而 $\alpha>-\infty$（或 $\beta<+\infty$）. 有

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s$$

则由假设得，当 $x\in(\alpha,\beta)$ 时

$$|\varphi(x)|\leqslant|y_0|+\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi(s))|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant|\varphi(x_0)|+A|x-x_0|+B\int_{x_0}^{x}|\varphi(s)|\mathrm{d}s$$

记 $\tilde{A}=|\varphi(x_0)|+A\mathrm{d}$，其中 $\mathrm{d}=\max(|\alpha-x_0|,|\beta-x_0|)$，则

$$|\varphi(x)|\leqslant\tilde{A}+B\int_{x_0}^{x}|\varphi(s)|\mathrm{d}s \tag{2}$$

令

$$u(x)=\int_{x_0}^{x}|\varphi(s)|\mathrm{d}s$$

显然 $u(x_0)=0$. 当 $x\geqslant x_0$ 时，$u(x)\geqslant0$.

先考虑 $x\geqslant x_0$ 的情形，此时 $u(x)\geqslant0$，且

$$u'(x)=|\varphi(x)|\leqslant\tilde{A}+Bu(x)$$

$$[u'(x)-Bu(x)]e^{-Bx}\leqslant\tilde{A}e^{-Bx}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[e^{-Bx}u(x)]\leqslant\tilde{A}e^{-Bx}$$

上式两边积分得

$$e^{-Bx}u(x)\leqslant\frac{\tilde{A}}{B}(e^{-Bx_0}-e^{-Bx})$$

即有

$$u(x)\leqslant\frac{\tilde{A}}{B}(e^{B(x-x_0)}-1)\leqslant\frac{\tilde{A}}{B}e^{B(x-x_0)}$$

由(2)式得

$$|\varphi(x)|\leqslant\tilde{A}(1+e^{B(x-x_0)})\leqslant\tilde{A}(1+e^{B\beta})<+\infty$$

则当 $x\to\beta-0$ 时，$|\varphi(x)|\not\to\infty$ 与推论 1 矛盾，因而 $\beta=+\infty$.

再考虑 $x\leqslant x_0$ 的情形，此时 $u(x)\leqslant0$，可得

$$u'(x)=|\varphi(x)|\geqslant-\tilde{A}-Bu(x)$$

$$[u'(x)+Bu(x)]e^{Bx}\geqslant-\tilde{A}e^{Bx}$$

上式两边由 x 到 x_0 积分，即有

$$u(x)\leqslant\frac{\tilde{A}}{B}[1-e^{B(x_0-x)}]$$

由(2)得

$$\varphi(x)\leqslant\tilde{A}+\tilde{A}[1-e^{B(x_0-x)}]$$

当 $x\to\alpha+0$ 时，$|\varphi(x)|\not\to\infty$ 与推论 1 矛盾，因而 $\alpha=-\infty$.

【245】 设 $f(x,y)$ 在整个 xoy 平面上连续且满足李普希兹条件 $|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqslant L|y-\bar{y}|$，$L>0$. 求证：

1）初值问题 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\sin\dfrac{x}{n}$，$y(0)=0$ 的解 $y_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在；

2）$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n(x)=0$.

证 1）因 $f(x,y)\sin\dfrac{x}{n}$ 关于 (x,y) 在整个 xoy 平面上连续，且满足李普希兹条件

$$\left|f(x,y)\sin\frac{x}{n}-f(x,\bar{y})\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant|f(x,y)-f(x,\bar{y})|$$
$$\leqslant L|y-\bar{y}|,\qquad L>0$$

所以，由存在惟一性定理及延展定理知上述初值问题存在惟一的饱和解 $y=y_n(x)$.

下面证明它的最大存在区间为$(-\infty,+\infty)$. 用反证法. 若 $y_n(x)$的最大存在区间为(α,β)，$\beta<+\infty$. 由于

$$y_n(x)=\int_0^x f(t,y_n(t))\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t\qquad(x\geqslant 0)$$

所以

$$|y_n(x)|\leqslant\int_0^x|f(t,y_n(t))-f(t,0)|\mathrm{d}t+\int_0^x|f(t,0)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant M_1\beta+\int_0^x L|y_n(t)|\mathrm{d}t$$

其中 $M_1=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\beta}|f(t,0)|$. 由贝尔曼不等式(§3.1 习题 224)有$|y_n(x)|\leqslant M_1\beta\cdot e^{Lx}$，那么，当 $x\to\beta-0$ 时，$|y_n(x)|\not\to\infty$ 这与推论 1 矛盾. 所以 $\beta=+\infty$，类似可证 $\alpha=-\infty$. (论证从略)

2) 对任意固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$

$$y_n(x)=\int_0^x f(t,y_n(t))\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t$$

取 B 充分大，使

$$|x|\leqslant B\tag{1}$$

利用李普希兹条件易得

$$\left|f(x,y_n(x))\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\left|f(x,0)\sin\frac{x}{n}\right|+L|y_n(x)|\left|\sin\frac{x}{n}\right|$$

代入(1)式，并由于$\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{x}{n}$得

$$|y_n(x)| \leqslant \left|\int_0^x L|y_n(t)| \cdot \left|\frac{t}{n}\right| \mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^x |f(t,0)| \cdot \left|\frac{t}{n}\right| \mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \frac{B^2}{n}M_2 + \frac{B}{n}L\int_0^x |y_n(t)|\mathrm{d}t \tag{2}$$

其中 $M_2 = \max\limits_{x\in[-B,B]} |f(x,0)|$，由(2)及贝尔曼不等式可得

$$|y_n(x)| \leqslant \frac{B^2}{n}M^2 exp\left(\frac{B^2}{n}L\right)$$

上式中 $n \to +\infty$，得 $\lim\limits_{n\to+\infty} |y_n(x)| = 0$.

【246】 设 $f(y)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上连续且单调增加的函数，C 为某给定的实数．求证：初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -f(y) + C, \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

的解 $y = y(x;\ x_0, y_0)$在$[x_0, +\infty)$上存在且是惟一的．

证　1) 由§3.1 定理2知初值问题(1)的解是局部存在的．先证(1)的右行饱和解的最大存在区间为$[x_0, +\infty)$．用反证法．若(1)的右行饱和解的最大存在区间为(x_0, β)，而 $\beta < +\infty$．

下面分三种情形分别进行讨论．

ⅰ) 若对所有的 $y\in(-\infty,+\infty)$，有 $-f(y)+C>0$．从而 $y'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$y(x)>y(x_0)=y_0$．于是

$$y'(x) - y'(x_0) = f(y_0) - f(y(x)) \leqslant 0$$

即 $y'(x) \leqslant y'(x_0)$．两边从 x_0 到 x 积分，得

$$y(x) - y(x_0) \leqslant y'(x_0)(x - x_0)$$

于是有

$$y_0 < y(x) \leqslant y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$$

因此当 $x \to \beta - 0$ 时，$|y(x)| \not\to \infty$．由推论1即知 $\beta = +\infty$．

ⅱ) 若对所有的 $y\in(-\infty,+\infty)$，有 $-f(y)+C<0$ 即

$y'(x)<0$. 则当 $x>x_0$ 时，$y(x)<y_0$. 那么类同 i)的推证可得

$$y_0+y'(x_0)(x-x_0)\leqslant y(x)\leqslant y_0$$

于是当 $x\to\beta-0$ 时，$|y(x)|\not\to\infty$ 由推论 1 即知 $\beta=+\infty$.

iii) 若 $-f(y)+C$ 变号,则由 $f(y)$单调增加可知,$-f(y)+C$ 只可能变号一次,即存在 $\bar{y}$,使 $-f(\bar{y})+C=0$. 于是

$$-f(y)+C\begin{cases}>0 & y<\bar{y}\text{ 时}\\ =0 & y=\bar{y}\text{ 时}\\ <0 & y>\bar{y}\text{ 时}\end{cases}$$

(a) 若初值 $y_0=y(x_0)=\bar{y}$，则 $y(x)\equiv\bar{y}$ 是初值问题的解，此时显然有 $\beta=+\infty$.

(b) 若 $y_0<\bar{y}$，则 $-f(y_0)+C>0$，$y'(x_0)>0$. 即在 x_0 的邻域内 $y(x)$单调增加，而由解的惟一性，$y=y(x)$与 $y=\bar{y}$ 不能相交，即得

$$y_0\leqslant y(x)<\bar{y}$$

从而当 $x\to\beta^-$ 时，$|y(x)|\not\to\infty$，这与推论 1 矛盾. 所以，$\beta=+\infty$

(c) 若初值 $y_0=y(x_0)>\bar{y}$，此时 $-f(y_0)+C<0$，则类似于(b)的论证可得

$$\bar{y}\leqslant y(x)\leqslant y_0$$

从而当 $x\to\beta-0$ 时，$|y(x)|\not\to\infty$，所以也有 $\beta=+\infty$.

2) 证明解的惟一性. 假设初值问题(1)有两个解 $y_1(x)$与 $y_2(x)$，由 1)所证知 $y_1(x)$，$y_2(x)$的右行解的存在区间均为 $[x_0,+\infty)$. 用反证法. 若 $y_1(x)\neq y_2(x)$，即存在 $x_1\in[x_0,+\infty)$，使

$$y_1(x_1)\neq y_2(x_1),\quad (不妨设\ y_2(x_1)>y_1(x_1))$$

则必存在 $\bar{x}\in[x_0,x_1]$，使得 $x\in(x_0,\bar{x}]$，$y_1(x)\equiv y_2(x)$. 而 $x\in(\bar{x},x_1]$时，$y_2(x)>y_1(x)$.

令 $z(x)=y_1(x)-y_2(x)$. 当 $x\in(\bar{x},x_1]$时，$z(x)<0$ 且 $z'(x)=f(y_2(x))-f(y_1(x))>0$，$z(\bar{x})=0$，则对 $x\in(\bar{x},x_1)$，$z(x)$单调增加，从而 $z(x)>z(\bar{x})=0$. 这与 $z(x)<0$ 矛盾. 因而在$[x_0,+\infty)$ 上有 $y_1(x)\equiv y_2(x)$.

即证明了初值问题(1)的解在$[x_0,+\infty)$上是存在惟一的.

§3.4　解对初值和对参数的连续依赖性和可微性

提　要

将初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) & (1)\\ y(x_0)=y_0 & (2)\end{cases}$$

的解记作 $y=\varphi(x;\ x_0,y_0)$.

定理 1　设 $f(x,y)$在区域 D 内连续且关于 y 局部地满足李普希兹条件，初值问题(1)，(2)存在惟一的饱和解 $y=\varphi(x;\ x_0,y_0)$，它的存在区间为(α,β)，则对任意 a，b 满足$\alpha<a<b<\beta$，只要$(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$充分靠近(x_0,y_0)，方程(1)满足初始条件 $y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ 的解 $y=\varphi(x;\ \bar{x}_0,\bar{y}_0)$都至少在区间$[a,b]$上存在，并且当 $\bar{x}_0\to x_0$，$\bar{y}_0\to y_0$ 时，有 $\varphi(x;\ \bar{x}_0,\bar{y}_0)\to\varphi(x;$

$x_0,y_0)$在$[a,b]$上一致成立.

定理 2(解对初值的连续依赖性定理) 设$f(x,y)$满足定理 1 的条件. 这时对任意点$(x_0,y_0)\in D$, 初值问题(1),(2)都存在惟一的饱和解 $y=\varphi(x;\ x_0,y_0)$, 它的最大存在区间为$(\alpha(x_0,y_0),\beta(x_0,y_0))$, 则 $\varphi(x;\ x_0,y_0)$作为 x, x_0, y_0 的函数在 Ω 内连续, 其中 $\Omega\triangleq\{(x,x_0,y_0)\mid\alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0),\ (x_0,y_0)\in D\}$是一区域.

考虑含参数 λ 的初值问题

$$y'=f(x,y,\lambda),\qquad y(x_0)=y_0 \tag{3}$$

将(3)的解记为 $y=\varphi(x;\ x_0,y_0,\lambda)$

定理 3(解对初值及参数的连续依赖性定理) 设 $f(x,y,\lambda)\in C(D_\lambda)$, 且在区域 D_λ 内关于 y 满足局部李普希兹条件, 这时对任意$(x_0,y_0,\lambda)\in D_\lambda$,初值问题(3)都存在惟一的饱和解 $y=\varphi(x;\ x_0,y_0,\lambda)$,它的最大存在区间为$(\alpha(x_0,y_0,\lambda),\beta(x_0,y_0,\lambda))$, 则 $\varphi(x;\ x_0,y_0,\lambda)$作为 x, x_0,y_0, λ 的函数在Ω_λ 内连续, 其中

$$\Omega_\lambda\triangleq\{(x,x_0,y_0,\lambda)\mid\alpha(x_0,y_0,\lambda)<x<\beta(x_0,y_0,\lambda),\ (x_0,y_0,\lambda)\in D_\lambda\}$$

定理 4 设 $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$在区域$D$ 内连续, 这时对任意点$(x_0,y_0)\in D$, 初值问题(1),(2)都存在惟一的饱和解 $y=\varphi(x;\ x_0,y_0)$, 它的最大存在区间为$(\alpha(x_0,y_0),\beta(x_0,y_0))$, 则 $\varphi(x;\ x_0,y_0)$在 Ω 内连续可微, 其中

$$\Omega\triangleq\{(x,x_0,y_0)\mid\alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0),\ (x_0,y_0)\in D\}$$

并且$\dfrac{\partial\varphi(x;\ x_0,y_0)}{\partial x_0}$, $\dfrac{\partial\varphi(x;\ x_0,y_0)}{\partial y_0}$分别满足下列初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\partial f(x,\ \varphi(x,x_0,y_0))}{\partial y} y & (4) \\ y(x_0) = -f(x_0,y_0) & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\partial f(x,\ \varphi(x,x_0,y_0))}{\partial y} y \\ y(x_0) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

称方程(4)为初值问题(1)，(2)的解 $\varphi(x;\ x_0,y_0)$的变分方程.

题　　解

【247】 已知方程$\dfrac{dy}{dx}=\sin(xy)$. 试求

$$\left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}},\quad \left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}}$$

解　因 $f(x,y)=\sin(xy)$及$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\cos(xy)$在整个 xoy 平面连续，所以满足定理 4 的条件. 由定理 4 求解初值问题(4)，(6)易得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}(x,x_0,y_0)= e^{\int_{x_0}^{x} f_y(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))d\tau} = e^{\int_{x_0}^{x} \tau\cos(\tau\cdot\varphi(\tau,x_0,y_0))d\tau}$$

$$\left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}} = e^{\int_0^x \tau\cdot\cos(\tau\cdot y(\tau;\ 0,0))d\tau}$$

$$= e^{\int_0^x \tau\cdot\cos(\tau\cdot 0)d\tau}$$

$$= e^{\int_0^x \tau d\tau} = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

因为 $f(0,0)=0$，求解初值问题(4)，(5)易得

$$\left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}} = 0.$$

【248】 设 $y=\varphi_n(x)$是方程$\frac{dy}{dx}=1+y^2$的解，且满足$\varphi(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}$. 试证对任给的 $\varepsilon>0$，存在 N 使当 $n>N$ 时，$\varphi_n(x)$在闭区间$[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\varepsilon]$上存在,且在此区间上成立不等式：

$$|\varphi_n(x)-\tan x|<\varepsilon$$

证 方程$\frac{dy}{dx}=1+y^2$的右端函数$f(x,y)=1+y^2$在整个 xoy 平面上连续且满足局部李普希兹条件，方程满足 $y(0)=0$ 存在惟一饱和解 $y=\tan x$，它的最大存在区间为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，因当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\to0$，$\frac{1}{n^2}\to0$. 由定理 1 知存在 N，当 $n>N$ 时，$\varphi_n(x)$在$[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\varepsilon]$上存在，且$|\varphi_n(x)-\tan x|<\varepsilon$.

【249】 设 $y=\varphi_n(x)$是方程$\frac{dy}{dx}=ye^{(x+y)^2}$的解，满足条件$\varphi_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}$，试证对于任给 $\varepsilon>0$ 和实数 A、B，存在 N，使当 $n>N$时，$\varphi_n(x)$在闭区间 $A\leqslant x\leqslant B$ 上存在，且在此区间上 $|\varphi_n(x)|<\varepsilon$.

证 方程$\frac{dy}{dx}=ye^{(x+y)^2}$的右端函数$f(x,y)=ye^{(x+y)^2}$在整个 xoy 平面上连续且满足局部李普希兹条件，方程满足初始条件 $y(0)=0$ 存在惟一饱和解 $y\equiv0$，显然它的最大存在区间为$(-\infty,+\infty)$. 因为当 $n\to\infty$时，$(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})\to(0,0)$. 由定理 1 知，任意给定 $\varepsilon>0$ 和实数 A、B，$[A,B]\subset(-\infty,+\infty)$，存在 $N>0$，使当 $n>N$ 时，$\varphi_n(x)$在闭区间$[A,B]$上存在，且

$|\varphi_n(x)|<\varepsilon$.

【250】 设 $\varphi(x;0,1,\mu)$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mu y$ 的适合条件 $\varphi(0,\mu)=1$ 的解, 试证: 对于任意 $\varepsilon>0$, $T>0$, 存在 $\delta(\varepsilon,T)>0$, 使当 $|\mu|<\delta$, $0\leqslant x\leqslant T$ 时,有 $|\varphi(x,\mu)-1|<\varepsilon$. 但不存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使当 $|\mu|<\delta$ 时, 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上有 $|\varphi(x,\mu)-1|<\varepsilon$.

证 易求得 $\varphi(x;0,1,\mu)=e^{\mu x}$, 它的最大存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

1) 对任意 $\varepsilon>0$, $T>0$, 要求 $\delta>0$, 使 $|\mu|<\delta$ 在 $0\leqslant x\leqslant T$ 时, 有 $|e^{\mu x}-1|<\varepsilon$. 分两种情形来讨论:

ⅰ) $\mu>0$,则 $e^{\mu x}<e^{\mu T}<1+\varepsilon$. 这时, $\mu<\frac{1}{T}\ln(1+\varepsilon)$.

ⅱ) $\mu<0$, 则 $e^{\mu x}>e^{\mu T}$, $1-e^{\mu x}<1-e^{\mu T}<\varepsilon$. 所以 $e^{\mu T}>1-\varepsilon$, 这时 $\mu>\frac{1}{T}\ln(1-\varepsilon)$, $|\mu|=-\mu<\frac{1}{T}\ln\frac{1}{1-\varepsilon}$.

取 $\delta=\min\left(\frac{1}{T}\ln(1+\varepsilon),\ \frac{1}{T}\ln\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$, 则当 $|\mu|<\delta$, $0\leqslant x\leqslant T$ 时, 有 $|\varphi(x,\mu)-1|<\varepsilon$.

2) 因为当 $x\to+\infty$, $\mu>0$ 时, $e^{\mu x}\to+\infty$. 从而不可能在 $[0,+\infty)$ 上有 $|\varphi(x,\mu)-1|<\varepsilon$.

§3.5　微分方程组的基本理论

提　要

定义 1　我们把 n 维向量

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

的范数定义为

$$\|Y\|=\sum_{i=1}^{n}|y_i|$$

易于证明如此定义的向量范数具有如下性质

1　$\|Y\|\geqslant 0$，且$\|Y\|=0$当且仅当$Y=\mathbf{0}$

2　$\|Y_1+Y_2\|\leqslant\|Y_1\|+\|Y_2\|$

3　对任意常数α，有$\|\alpha Y\|=|\alpha|\|Y\|$

4　$\left\|\int_{x_0}^{x}F(x)\mathrm{d}x\right\|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\|F(x)\|\mathrm{d}x\right|$

定义 2　如果对于$[a,b]$上的任意x，有

$$\lim_{x\to+\infty}\|Y_n(x)-Y(x)\|=0$$

则称$Y_n(x)$在$[a,b]$上按范数收敛于$Y(x)$．如果上式对$[a,b]$上的x为一致的，则称$Y_n(x)$在$[a,b]$上按范数一致收敛于$Y(x)$．

定义 3　如果对n维向量函数$F(x)$有

$$\lim_{x\to+\infty}\|F(x)-F(x_0)\|=0$$

则称F在x_0连续．

定理 1(存在惟一性定理)　一阶方程构成的方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})\tag{1}$$

其中$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，$\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})=(f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\cdots,f_n(x,y_1,y_2,\cdots y_n))^T$．在空间$R^{n+1}$中某一区域

$$\bar{R}:\ |x-x_0|\leqslant a,\qquad \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|\leqslant b$$

上连续，并且关于 $\boldsymbol{y}$ 满足李普希兹条件，即存在常数 $L>0$，使得当 $(x,\boldsymbol{y})$，$(x,\bar{\boldsymbol{y}})\in\bar{R}$ 时有

$$\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(x,\bar{\boldsymbol{y}})\|\leqslant L\|\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}}\|$$

或

$$|f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)-f_i(x,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_n)|\leqslant L\sum_{i=1}^{n}|y_i-\bar{y}_i|$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

则方程组(1)至少在区间 $x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$ 上存在惟一满足初始条件

$$\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0 \tag{2}$$

的解 $\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{\varphi}_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其中 $h_0=\min(a,\dfrac{b}{M})$，$M=\max\limits_{(x,\boldsymbol{y})\in\bar{R}}\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})\|$.

定理 2(解对始值的连续性) 设 n 维向量值函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 在 $(x,\boldsymbol{y})$ 空间内的某个开区域 G 上是连续的，而且对 $\boldsymbol{y}$ 满足局部李普希兹条件. 假设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x)$ 是方程组(1)的一个解，令它的存在区间为 I. 在区间 I 内任取一个有界闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$，则存在常数 $\delta>0$，使得对任何初值 $(x_0,\boldsymbol{y}_0)$

$$a\leqslant x_0\leqslant b,\qquad \|\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{\varphi}(x_0)\|\leqslant\delta$$

初值问题(1),(2)的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x;\ x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 至少在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上存在，并且它在 $(x,x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的闭区域

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad a\leqslant x_0\leqslant b,\quad \|\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{\varphi}(x_0)\|\leqslant\delta$$

上是连续的.

定理 3(解对参数的连续性) 设 n 维向量值函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$ $(\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ 是参数$)$ 在区域

$$G_\lambda:\ |x|\leqslant a,\ \|\boldsymbol{y}\|\leqslant b,\ \|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\leqslant c$$

上是连续的，而且对 $\boldsymbol{y}$ 满足李普希兹条件

$$\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{\lambda})\|\leqslant L\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\|$$

其中 $L>0$ 是李普希兹常数. 令正数 M 是 $\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})\|$ 在区域 G_λ 上的一个上界，并且令 $h_0=\min(a,\frac{b}{M})$，则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}) & (3)\\ \boldsymbol{y}(0)=0 & (4)\end{cases}$$

的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x,\boldsymbol{\lambda})$ 在区域

$$D_\lambda:\ |x|\leqslant h_0,\ \|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\leqslant c$$

上是连续的.

定理4 设 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$ 在区域 G_λ 上连续，而且对 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 有连续的偏导数，则微分方程组(3)满足初始条件(4)的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x,\boldsymbol{\lambda})$ 在区域 D_λ 上是连续可微的，其中区域 G_λ，D_λ 的定义同定理3.

定理5 设 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$ 在区域 $\bar{G}_\lambda$ 上连续，而且对 $\boldsymbol{y}$ 及 $\boldsymbol{\lambda}$ 的各分量的偏导数连续，则对每一点 $(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\in\bar{G}_\lambda$，方程组(3)满足 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$ 的初值问题有惟一饱和解 $\boldsymbol{\varphi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$，$\omega_-(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})<x<\omega_+(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 它作为 $x,x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}$ 的函数在区域

$$\Omega_\lambda:\omega_-(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})<x<\omega_+(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}),$$
$$(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\in\bar{G}_\lambda$$

上是连续的，并且

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x,x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}{\partial y_{0k}},\ \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x,x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_0},\ \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x,x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_j}$$

分别是初值问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x, x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{e}_k \left(\boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{第 } k \text{ 个} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x, x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{y}(x_0) = -\boldsymbol{f}(x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{\lambda}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x, x_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{y} + \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(x, x_0, \boldsymbol{y}_0 \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda}}{\partial \lambda_j}, \\ \boldsymbol{y}(x_0) = 0 \end{cases}$$

的解. 其中区域 $\bar{G}_\lambda$ 定义为

$$\bar{G}_\lambda:\ |x - x_0| \leqslant a,\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| \leqslant b,\ \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0\| \leqslant c.$$

定理 6　任意一个已解出最高阶导数的 n 阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x;\ y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)$$

与下面的 n 个一阶方程构成的微分方程组等价:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{x} = y_2 \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n-2}}{\mathrm{d}x} = y_{n-1} \\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x} = f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) \end{cases}$$

类似地，高阶微分方程组也可化为等价的一阶方程构成的微分方程组.

定理7 如果函数 $f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 在点 $P_0(x_0,y_0,\cdots,y_0^{(n-1)})$ 的某邻域内关于 $(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 连续，且关于变量 $y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 满足李普希兹条件，即存在常数 $L>0$，使得在上述邻域中有

$$|f(x,y_1,y_1',\cdots,y_1^{(n-1)})-f(x,y_2,y_2',\cdots,y_2^{(n-1)})|$$
$$\leqslant L(|y_1-y_2|+|y_1'-y_2'|+\cdots+|y_1^{(n-1)}-y_2^{(n-1)}|)$$

则在 x_0 的某邻域中

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{5}$$

存在惟一满足初始条件

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{6}$$

的解 $y=\varphi(x)$.

定理8 设 n 维子空间

$$\overline{V}=\{(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\,|\,|x-x_0|\leqslant a,$$
$$|y-y_0|\leqslant b,\cdots,|y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}|\leqslant b\}$$

函数 $f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 在 $\overline{V}$ 上连续，且关于 $y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 满足局部李普希兹条件，即对任意的 $(y_1,y_1',\cdots,y_1^{(n-1)}),(y_2,y_2',\cdots,y_2^{(n-1)})\in\overline{V}$，有

$$|f(x,y_1,y_1',\cdots,y_1^{(n-1)})-f(x,y_2,y_2',\cdots,y_2^{(n-1)})|$$
$$\leqslant L[|y_1-y_2|+|y_1'-y_2'|+\cdots+|y_1^{(n-1)}-y_2^{(n-1)}|]$$

其中 $L>0$ 是李普希兹常数，则初值问题(5)，(6)的解 $y=\varphi(x)$ 可以向左、右延展，直到 $(x,\varphi(x))$ 任意接近 $\overline{V}$ 的边界.

题 解

【251】 证明定理1.

证 分以下五个步骤证明之.

1) 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) & (1) \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 & (2) \end{cases}$$

等价于积分方程组

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) dx \tag{3}$$

事实上，令 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$是问题(1)，(2)的解，于是(1)对 x 积分便有

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{C} + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x)) dx$$

再由初值条件(2)确定 $C = \boldsymbol{y}_0$. 因此，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$是方程组(3)的解.

反过来，设 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$是积分方程组(3)的解. 由(3)可知 $\boldsymbol{\varphi}(x)$是连续的，从而 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))$也是连续的. 因此，$\boldsymbol{\varphi}(x)$是可微的. 于是，积分方程组(3)的两端对 x 求导，得到

$$\boldsymbol{\varphi}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))$$

并且由(3)知 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$满足初值条件

$$\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

即 $\boldsymbol{\varphi}(x)$是问题(1),(2)的解.

2) 作(3)的毕卡逐次逼近序列$\{\boldsymbol{\varphi}_n(x)\}$

令

$$\boldsymbol{\varphi}_0(x) \equiv \boldsymbol{y}_0,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x) = \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_0) dx, \quad |x - x_0| \leqslant h$$

则

$$\|\boldsymbol{\varphi}_1(x)-\boldsymbol{\varphi}_0(x)\|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_0)\|\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant M|x-x_0|\leqslant b$$

第 n 次近似解为

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x)=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_{n-1}(x))\mathrm{d}x \tag{4}$$

并且当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时，有

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(x)-\boldsymbol{y}_0\|\leqslant b.$$

3) 序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_n(x)\}$ 的一致收敛性

由于 $\{\boldsymbol{\varphi}_n(x)\}$ 的收敛问题等价于级数

$$\boldsymbol{\varphi}_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\boldsymbol{\varphi}_k(x)-\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(x)] \tag{5}$$

的收敛问题，因此只需证明(5)的一致收敛性即可.

首先证明(5)的一般项满足

$$\|\boldsymbol{\varphi}_k(x)-\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(x)\|\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x-x_0|)^k}{k!} \tag{6}$$

显然(6)式对 $k=1$ 成立. 现在假设(6)对 $k-1$ 成立，则有

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{\varphi}_k(x)-\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(x)\|\\&=\left\|\int_{x_0}^{x}(\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(x))-\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_{k-2}(x)))\mathrm{d}x\right\|\\&\leqslant L\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(x)-\boldsymbol{\varphi}_{k-2}(x)\|\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x-x_0|)^k}{k!}\end{aligned}$$

由归纳法知，(6)对所有正整数 n 都成立. 所以当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时，有

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(x)-\boldsymbol{\varphi}_{n-1}(x)\|\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)^n}{n!}$$

由魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法知级数(5)是一致收敛的，从而序列$\{\boldsymbol{\varphi}_n(x)\}$一致收敛. 令$\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{\varphi}_n(x)=\boldsymbol{\varphi}(x)$，则$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x)$连续，且$\|\boldsymbol{\varphi}(x)-\boldsymbol{y}_0\|\leqslant b$.

4) 证明$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x)$是积分方程组(3)的解

令$n\to+\infty$，由(4)知

$$\boldsymbol{\varphi}(x)=\boldsymbol{y}_0+\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_n(x))\mathrm{d}x$$

因此，归结于证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_n(x))\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}(x))\mathrm{d}x \tag{7}$$

任意给定$\varepsilon>0$，可找到$N=N(\varepsilon)>0$，使得当$|x-x_0|\leqslant h$时，有不等式

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(x)-\boldsymbol{\varphi}(x)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{Lh},\qquad n\geqslant N.$$

因此，当$n\geqslant N$时，对$|x-x_0|\leqslant h$，有

$$\left\|\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_n(x))\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}(x))\mathrm{d}x\right\|$$

$$\leqslant L\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{\varphi}_n(x)-\boldsymbol{\varphi}(x)\|\mathrm{d}x\leqslant L\cdot\frac{\varepsilon}{Lh}\cdot h=\varepsilon$$

即(7)式成立. 因此，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x)$是积分方程组(3)的一个解.

5) 证明(3)的解的惟一性

事实上，设$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x)$与$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(x)$是(3)的两个解，即

$$\boldsymbol{\varphi}(x)=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}(x))\mathrm{d}x$$

$$\boldsymbol{\psi}(x)=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\psi}(x))\mathrm{d}x$$

两式相减，利用李普希兹条件得到

$$\|\boldsymbol{\varphi}(x)-\boldsymbol{\psi}(x)\|\leqslant L\cdot\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{\varphi}(x)-\boldsymbol{\psi}(x)\|\mathrm{d}x \qquad (8)$$

则由贝尔曼不等式知$\|\boldsymbol{\varphi}(x)-\boldsymbol{\psi}(x)\|\equiv 0$

即

$$\boldsymbol{\varphi}(x)\equiv\boldsymbol{\psi}(x),\quad x\geqslant x_0$$

同理可证，当 $x\leqslant x_0$ 时，$\boldsymbol{\varphi}(x)\equiv\boldsymbol{\psi}(x)$.

总结以上各步，定理证毕.

【252】 证明定理 7.

证 由定理 6 知，初值问题

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

与下面的由 n 个一阶方程构成的微分方程组的初值问题(3)等价

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y_1\\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=y_2\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x}=f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})\end{cases} \qquad (3)$$

$$y_i(x_0)=y_{i0},\quad i=1,2,\cdots,n \qquad (4)$$

记

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{y}_0=\begin{pmatrix}y_{10}\\ y_{20}\\ \vdots\\ y_{n0}\end{pmatrix}$$

$$
\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}) \\ f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}) \end{pmatrix}
$$

则方程组(3)可写为

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})
$$

初值条件(4)可写为

$$
\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0
$$

因此，由定理1知，初值问题(1),(2)的解的存在惟一性.

【253】 如果方程

$$
y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots
$$

$$
+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (1)
$$

的系数 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 及右端函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且连续，则对于任一 $x_0\in[a,b]$ 及任意的 y_0，y_0'，$\cdots$，$y_0^{(n-1)}$，方程(1)的满足初始条件

$$
\varphi(x_0)=y_0,\varphi'(x_0)=y_0',\cdots,\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (2)
$$

的解 $y=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在且惟一.

证 方程(1)可写为

$$
y^{(n)}=-a_1(x)y^{(n-1)}-a_2(x)y^{(n-2)}-\cdots-a_n(x)y-f(x)
$$

$$
\triangleq F(x,y',\cdots,y^{(n-1)}) \qquad (3)
$$

因为 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以存在 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 及 M_0，使得对任意的 $x\in[a,b]$，有

$$
|a_i(x)|\leqslant M_i, \qquad |f(x)|\leqslant M_0
$$

取 $L=\max\{M_0,M_1,\cdots,M_n\}$. 对任意的 $x_0\in[a,b]$，函数

$F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$在$(x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})$的邻域内关于$(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$连续，且有

$$\begin{aligned}&|F(x,y_1,y_1',\cdots,y_1^{(n-1)})-F(x,y_2,y_2',\cdots,y_2^{(n-1)})|\\=&\left|-a_1(x)(y_1^{(n-1)}-y_2^{(n-1)})-a_2(x)(y_1^{(n-2)}-y_2^{(n-2)})\right.\\&\left.-\cdots-a_{n-1}(x)(y_1'-y_2')-a_n(x)(y_1-y_2)\right|\\\leqslant& L(|y_1^{(n-1)}-y_2^{(n-1)}|+\cdots+|y_1'-y_2'|+|y_1-y_2|)\end{aligned}$$

由上题知，初值问题(1),(2)的解存在且惟一，类似于§3.2习题241或习题242可以证明解的存在区间为$[a,b]$.

【254】 设

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=xy-z\\\dfrac{dz}{dx}=xy^2-z\\y(0)=z(0)=1\end{cases}$$

a) 证明在区间$|x|<\dfrac{3}{10}$内其解可用逐次逼近法求得；

b) 用逐次逼近法求出y和z的前三次近似.

解 a) 设R：$|x|\leqslant\dfrac{3}{10}$，$|y-1|\leqslant\dfrac{b}{2}$，$|z-1|\leqslant\dfrac{b}{2}$，

即$|y|\leqslant1+\dfrac{b}{2}$，$|z|\leqslant1+\dfrac{b}{2}$，那么有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{F}(x,y,z)\|&\triangleq|xy-z|+|xy^2-z|\\&\leqslant|xy|+|xy^2|+2|z|\\&\leqslant\frac{3}{10}\left(\frac{2+b}{2}+\frac{(2+b)^2}{4}\right)+(2+b)\\&=\frac{2+b}{4}\left(\frac{26}{5}+\frac{3}{10}b\right)\end{aligned}$$

取$M=\max\limits_R\|\boldsymbol{F}(x,y,z)\|=\dfrac{2+b}{4}\left(\dfrac{26}{5}+\dfrac{3}{10}b\right)$

取 b 使得 $\frac{b}{M}=b\left[\frac{2+b}{4}\left(\frac{26}{5}+\frac{3}{10}b\right)\right]^{-1}\geqslant\frac{3}{10}$

这样就有 $h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)=\min\left(\frac{3}{10},\frac{b}{M}\right)=\frac{3}{10}$，上式经化简得

$$9b^2-226b+\frac{16}{5}\leqslant 0,$$

显然我们只要取 $b=2$ 即可，这时在

$$R:\ |x|\leqslant\frac{3}{10},\ |y-1|\leqslant 1,\ |z-1|\leqslant 1$$

中，方程组右端函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 连续且满足对 y,z 的李普希兹条件，可用逐次逼近法求解.

b) 按逐次逼近法公式

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}y_0(x)\\ z_0(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(0)\\ z(0)\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}y_k(x)\\ z_k(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(0)\\ z(0)\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}f_1(s,y_{k-1}(s),z_{k-1}(s))\\ f_2(s,y_{k-1}(s),z_{k-1}(s))\end{pmatrix}\mathrm{d}s,\\ \qquad\qquad k=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

得

$$\begin{pmatrix}y_0(x)\\ z_0(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1(x)\\ z_1(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}s-1\\ s-1\end{pmatrix}\cdot\mathrm{d}s=\begin{pmatrix}1-x+\frac{1}{2}x^2\\ 1-x+\frac{1}{2}x^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_2(x)\\ z_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}s(1-s+\frac{1}{2}s^2)-(1-s+\frac{1}{2}s^2)\\ s(1-s+\frac{1}{2}s^2)^2-(1-s+\frac{1}{2}s^2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\begin{pmatrix}1-x+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^4\\1-x+x^2-\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{24}x^6\end{pmatrix}.$$

【255】 求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\\dfrac{dx_2}{dt}=tx_1\\x_1(0)=1,\ x_2(0)=0\end{cases}$$

的第三次逼近解.

解 由逼近序列公式

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x_{1,0}\\x_{2,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}x_{1,k}\\x_{2,k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}x_{2,k-1}\\tx_{1,k-1}\end{pmatrix}dt\end{cases}$$

可得

$$\begin{pmatrix}x_{1,0}\\x_{2,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_{1,1}\\x_{2,1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_{1,2}\\x_{2,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^2\\t\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{6}t^3\\\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{6}t^3\\\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,3} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t + \frac{1}{6}t^4 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6}t^3 \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{30}t^5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{6}t^3 \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{30}t^5 \end{pmatrix}.$$

【256】 设方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 中的 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $q(x) < 0$. 试证：对方程的任一非零解 $y = y(x)$，函数 $f(x) = e^{\int_{x_0}^x p(s)\mathrm{d}s} y(x)y'(x)$ 为单调递增的，其中 $x_0 \in [a,b]$.

证 显然只需证明在区间 $[a,b]$ 上有 $f'(x) > 0$.

$$f'(x) = p(x)\, e^{\int_{x_0}^x p(s)\mathrm{d}s} y(x)y'(x) + [y'(x)]^2 e^{\int_{x_0}^x p(s)\mathrm{d}s}$$
$$+ y(x)y''(x)\, e^{\int_{x_0}^x p(s)\mathrm{d}s}$$
$$= e^{\int_{x_0}^x p(s)\mathrm{d}s} \{p(x)y(x)y'(x) + [y'(x)]^2 + y(x)y''(x)\} \tag{1}$$

因为 $y = y(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的任一非零解，所以 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$，将 $y''(x) = -[p(x)y'(x) + q(x)y(x)]$ 代入(1)式，得

$$f'(x) = e^{\int_{x_0}^x p(s)\mathrm{d}s} \{p(x)y(x)y'(x) + [y'(x)]^2$$
$$- p(x)y(x)y'(x) - q(x)y^2(x)\}$$
$$= e^{\int_{x_0}^x p(s)\mathrm{d}s} \{[y'(x)]^2 - q(x)y^2(x)\}$$

注意到条件 $q(x) < 0$，则由上式得 $f'(x) \geqslant 0$.

因为 $p(x)$，$q(x)$ 连续，所以方程满足解的存在惟一性定

理的条件. 由于 $y(x)$ 是方程的非零解，所以，对任意的 $x\in[a,b]$，$y(x)=0$ 与 $y'(x)=0$ 不能同时成立，即在区间 $[a,b]$ 上，$[y'(x)]^2-q(x)y^2(x)>0$. 于是 $f'(x)>0$，$x\in[a,b]$. 所以，$f(x)=e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}y(x)y'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上严格单调递增.

【257】 试利用定理 5 证明恒等式

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x;\ x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x;\ x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}{\partial y_{0i}}f_i(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\equiv 0$$

证 令

$$\boldsymbol{z}(x)=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x;\ x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x;\ x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}{\partial y_{0i}}f_i(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$$

由定理 5 得

$$\boldsymbol{z}(x_0)=-\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})+\begin{pmatrix}f_1(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\\ \vdots\\ f_n(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\end{pmatrix}=0$$

及

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}'(x)=&\frac{\partial\boldsymbol{f}(x;\ \boldsymbol{\varphi}(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}))}{\partial\boldsymbol{y}_0}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x;\ x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_0}\\&+\frac{\partial\boldsymbol{f}(x,\varphi(x;\ x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}))}{\partial\boldsymbol{y}_0}\\&\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x;\ x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}{\partial y_{0i}}f_i(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{z}(x)$ 满足初值问题

$$\boldsymbol{z}'(x)=\frac{\partial\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}(x;\ x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}))}{\partial\boldsymbol{y}_0}\boldsymbol{z}(x)$$

$$\boldsymbol{z}(x_0)=0$$

这是一个齐次线性方程组，由解的存在惟一性知 $\boldsymbol{z}(x)\equiv 0$. 证毕.

【258】 试利用高阶方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}=f(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)})$$

的延展定理(即定理 8)证明：设 $\bar{G}$ 是(t,x)平面的某有界闭域，而数值函数 $f(t,x,x')$于

$$(t,x)\in\bar{G},\quad |x'|<\infty$$

上连续. 如果当方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right)$$

的积分曲线 $x=\varphi(t)$还停留在 $\bar{G}$ 内部时，$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$恒小于某常数 $M>0$，则积分曲线 $x=\varphi(t)$向左、右延展时必可达到 $\bar{G}$ 的边界.

证　由于 $f(t,x,x')$在有界闭域 $D\triangleq\{(t,x,x')\mid(t,x)\in\bar{G},\ |x'|\leqslant M\}$上连续，所以 $f(t,x,x')$在 D 内有界，即存在 $C>0$，使$|f(t,x,x')|\leqslant C$. 若方程的解 $x=\varphi(t)$的存在区间为(a,b)，由高阶方程的延展定理(即定理 8)知，当 $t\to b-0$(或当 $t\to a-0$)时，积分曲线上的点(t,x)接近于 D 的边界，但由于$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|<M$，所以 $x=\varphi(t)$不可能达到边界线 $x'=\pm M$，因此必可达到 $\bar{G}$ 的边界.

【259】 设数值函数 $f(t,x,x',\cdots,x^{n-1})$在 $-\infty<t<+\infty$，$-\infty<x^{(i)}<+\infty\ (i=0,\cdots,n-1)$上连续可微，其中 $x^{(0)}=0$，并且 $f(t,0,\cdots,0)=0$，$x=\varphi(t)$是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

的定义在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的解. 求证：若 $x=\varphi(t)$在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的零点有聚点，则 $\varphi(t)\equiv0$.

证 若 $x=\varphi(t)$在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的零点有聚点，不妨假设零点为 t_n，即 $\varphi(t_n)=0$,那么由假设知存在 t_0 是 t_n 的聚点，不妨设 $t_n\to t_0$，当 $n\to+\infty$，即有 $\varphi(t_0)=0$. 由中值定理知，存在 $\bar{t}_n$ 介于 t_0 与 t_n 之间，使得

$$\varphi'(\bar{t}_n)=\frac{\varphi(t_n)-\varphi(t_0)}{t_n-t_0}=0$$

显然，$\bar{t}_n\to t_0$，当 $n\to+\infty$时，也有 $\varphi'(t_0)=0$. 同理，存在 $\bar{\bar{t}}_n$ 介于 $\bar{t}_n$ 与 t_0 之间，使得

$$\varphi''(\bar{\bar{t}}_n)=\frac{\varphi'(\bar{t}_n)-\varphi'(t_0)}{\bar{t}_n-t_0}=0$$

而且 $\bar{\bar{t}}_n\to t_0$，当 $n\to+\infty$时，并有 $\varphi''(t_0)=0$. 如此继续下去，可得

$$\varphi^{(n-1)}(t_0)=0,$$

因而 $x=\varphi(t)$满足初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}=f(t,x,\cdots,x^{(n-1)})\\ x(t_0)=0,\ x'(t_0)=0,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=0\end{cases}\tag{1}$$

又因 $f(t,0,\cdots,0)=0$，因而 $x\equiv0$ 是(1)的解，再由解的存在惟一性定理知 $\varphi(t)\equiv0$. 证毕.

第四章　线性微分方程

§4.1　线性微分方程的一般理论

提　　要

定义 1　一个 n 阶微分方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

若 F 是关于未知函数 y 及其各阶导数 $y',\cdots,y^{(n)}$ 的一次有理整式,即上述方程可表为如下形式

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (1)$$

其中 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 及右端函数 $f(x)$ 都是区间 $[a,b]$ 上的已知函数，则称(1)为 n 阶线性微分方程. 若 $f(x)\not\equiv 0$，则方程(1)称为非齐次的. 如果 $f(x)\equiv 0$，则方程(1)变为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad (2)$$

称为对应于方程(1)的 n 阶齐次线性微分方程.

定义 2

$$L[y]=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y$$

称为线性微分算子.

本节总假设 $a_i(x)(i=1,\cdots,n)$ 及 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

定义 3 设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是定义在区间$[a,b]$上的 n 个函数,如果存在不全为零的 n 个常数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,使得在区间$[a,b]$内恒等式

$$\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+\cdots+\alpha_ny_n(x)\equiv 0 \tag{3}$$

成立,则称函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在区间$[a,b]$内线性相关. 否则,如果(3)式仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 时才成立,则称函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在区间$[a,b]$内线性无关.

定义 4 设 n 个函数$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在$[a,b]$上有直至 $n-1$ 阶的导数,则称由它们构成的行列式

$$W[y_1(x),\cdots,y_n(x)]$$
$$=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

为函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$的朗斯基(Wronsky)行列式. 有时简记作 $W(x)$, $x\in[a,b]$.

定义 5 方程(2)的定义在区间$[a,b]$上的 n 个线性无关解称为(2)的基本解组.

定理 1 如果方程(1)的所有系数 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$及右端函数 $f(x)$都是区间$[a,b]$上的连续函数,则对于任一 $x_0\in[a,b]$及任意的 $y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}$,方程(1)存在惟一解 $y=\varphi(x)$定义在区间$[a,b]$上,且满足初始条件:

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

定理 2 如果 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是方程(2)在$[a,b]$上的 n 个解,则它们的线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+$

$C_ny_n(x)$也是(2)的解，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是任意常数.

定理 3　如果函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在区间$[a,b]$上线性相关，则在$[a,b]$上它们的朗斯基行列式 $W(x)\equiv 0$.

定理 4　如果方程(2)的解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在区间$[a,b]$上线性无关，则它们的朗斯基行列式 $W(x)$在这个区间的任何一点上都不等于零.

定理 5　如果 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是方程(2)的在$[a,b]$上的 n 个线性无关的解，则方程(2)在$[a,b]$上的通解可表示为

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是任意常数.

定理 6　如果 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是方程(2)的一个基本解组，则对于(2)的任何一个解 $y(x)$，均存在一组常数 $C_1^{(0)},C_2^{(0)},\cdots,C_n^{(0)}$，使得

$$y(x)=C_1^{(0)}y_1(x)+C_2^{(0)}y_2(x)+\cdots+C_n^{(0)}y_n(x).$$

定理 7　n 阶齐次线性方程(2)在$[a,b]$上一定存在且至多存在 n 个线性无关的解.

定理 8　n 阶非齐次线性方程(1)在$[a,b]$上存在且至多存在 $n+1$ 个线性无关的解.

定理 9　设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是方程(2)在$[a,b]$上的任意 n 个解，$W(x)$是它们的朗斯基行列式，则对$[a,b]$上的任一 x_0，都有

$$W(x)=W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(s)\mathrm{d}s}\tag{4}$$

关系式(4)称为刘维尔(Liouville)公式.

定理 10　设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是方程(2)的基本解

组，$\bar{y}(x)$是方程(1)的某一解，则方程(1)的通解可表示为

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)+\bar{y}(x)$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数.

定理 11 设 $y_1(x)$，$y_2(x)$分别是非齐次线性方程

$$L_1[y]=f_1(x),L_2[y]=f_2(x)$$

的解，则 $y_1(x)+y_2(x)$是方程

$$L[y]=f_1(x)+f_2(x)$$

的解.

定理 12 如果方程(2)的所有系数 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$都是$[a,b]$上的实值连续函数，而 $y=z(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$是方程(2)的复值解，则 $z(x)$的实部 $\varphi(x)$、虚部 $\psi(x)$和共轭复值函数 $\bar{z}(x)$也都是方程(2)在$[a,b]$上的解.

定理 13 若方程

$$L[y]=u(x)+iv(x)$$

有复值解 $y=U(x)+iV(x)$，这里 $u(x)$，$v(x)$都是$[a,b]$上的实值连续函数,那么这个解的实部 $U(x)$和虚部 $V(x)$分别是方程

$$L[y]=u(x),\qquad L[y]=v(x)$$

在$[a,b]$上的解.

题　　解

【260】 试判别下列各函数组在它们的定义区间上是线性相关的,还是线性无关的?

1) $\sin 2t$，$\cos t$，$\sin t$；

2) x，$\tan x$；

3) x^2-x+3，$2x^2+x$，$2x+4$；

4) e^t, te^t, t^2e^t.

解　1) 该函数组的朗斯基行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix}\sin2t & \cos t & \sin t\\ 2\cos2t & -\sin t & \cos t\\ -4\sin2t & -\cos t & -\sin t\end{vmatrix}=-3\sin2t$$

存在 $t_0=\frac{\pi}{4}$, $W(t_0)=-3\neq0$,故该函数组在$(-\infty,+\infty)$上是线性无关的.

2) 该函数组的朗斯基行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix}x & \tan x\\ 1 & \frac{1}{\cos^2x}\end{vmatrix}=\frac{2x-\sin2x}{2\cos^2x}$$

存在 $x_0=\pi$, $W(x_0)=\pi\neq0$, 故该函数组在$(k\pi-\frac{\pi}{2};k\pi+\frac{\pi}{2})$, $k\in Z$(Z 为整数集)上是线性无关的.

3) 该函数组的朗斯基行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix}x^2-x+3 & 2x^2+x & 2x+4\\ 2x-1 & 4x+1 & 2\\ 2 & 4 & 0\end{vmatrix}=-48\neq0$$

故该函数组在$(-\infty,+\infty)$上是线性无关的.

4) 该函数组的朗斯基行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix}e^t & te^t & t^2e^t\\ e^t & (1+t)e^t & (2t+t^2)e^t\\ e^t & (2+t)e^t & (2+4t+t^2)e^t\end{vmatrix}=2e^{3t}\neq0$$

故该函数组在$(-\infty,+\infty)$上是线性无关的.

【261】　证明函数组

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x^2, x\geqslant 0\text{ 时}\\ 0, x<0\text{ 时}\end{cases},\quad \varphi_2(x)=\begin{cases}0, x\geqslant 0\text{ 时}\\ x^2, x<0\text{ 时}\end{cases}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上线性无关，但它们的朗斯基行列式恒为零.

证 要证明$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$在$(-\infty,+\infty)$上线性无关，只须证明，等式$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)=0$对一切$x$成立，必须取$\alpha_1=\alpha_2=0$. 实际上，若取$\alpha_1\neq 0$，对于$x\geqslant 0$，有

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)=\alpha_1x^2+\alpha_2\cdot 0=\alpha_1x^2$$

它显然不能在$(0,+\infty)$上恒等于零，从而不能在$(-\infty,+\infty)$上恒等于零. 同样，对$\alpha_2\neq 0$也得到类似结论. 故$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$在$(-\infty,+\infty)$上线性无关.

但是

$$W(x)=\begin{vmatrix}x^2 & 0\\ 2x & 0\end{vmatrix}=0(x\geqslant 0),\quad W(x)=\begin{vmatrix}0 & x^2\\ 0 & 2x\end{vmatrix}=0(x<0)$$

即，对所有的x，恒有$W(x)=0$.

【262】 设$x(t)$和$y(t)$是区间$a\leqslant t\leqslant b$上的已知函数. 证明：如果在区间$a\leqslant t\leqslant b$上有$\dfrac{x(t)}{y(t)}\neq$常数$(y(t)\neq 0)$或$\dfrac{y(t)}{x(t)}\neq$常数$(x(t)\neq 0)$，则$x(t)$和$y(t)$在区间$a\leqslant t\leqslant b$上线性无关.

证 设在区间$a\leqslant t\leqslant b$上有$\dfrac{x(t)}{y(t)}\neq$常数$(y(t)\neq 0)$. 假设结论不成立，必存在不全为零的数α_1与α_2，使得

$$\alpha_1x(t)+\alpha_2y(t)\equiv 0,\quad a\leqslant t\leqslant b$$

若$\alpha_1\neq 0$，则有$\dfrac{x(t)}{y(t)}\equiv-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$，与$\dfrac{x(t)}{y(t)}\neq$常数矛盾. 若$\alpha_1=0$，

则有 $\alpha_2 \neq 0$，从而 $y(t) \equiv 0$，与 $y(t) \neq 0$ 矛盾. 同理可证 $\frac{y(t)}{x(t)}$ $\neq$ 常数的情况.

【263】 设在方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 中，$p(x)$ 在某区间 I 上连续且恒不为零，试证：它的任意两个线性无关的解的朗斯基行列式是区间 I 上的严格单调函数.

证 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是已知方程的定义在区间 I 上的任意两个线性无关的解. 根据刘维尔公式，有

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

其中 $W(x_0) \neq 0$. 考察

$$\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = -W(x_0)p(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

由于 $W(x_0) \neq 0$，$p(x)$ 在 I 上恒不等于零，并且 $e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)\mathrm{d}\tau} > 0$，故在 I 上 $\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}$ 恒为正或者恒为负，从而 $W(x)$ 在 I 上是严格单调函数.

【264】 试证明：二阶线性齐次方程的任意两个在区间 $[a,b]$ 上的线性无关解组的朗斯基行列式之比是一个不为零的常数.

证 设 $(y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x))$，$(y_1^{(2)}(x), y_2^{(2)}(x))$ 是方程的任意两个在区间 $[a,b]$ 上的线性无关解组，其朗斯基行列式分别为 $W_1(x), W_2(x)$. 取 $x_0 \in [a,b]$，根据刘维尔公式，有

$$W_1(x) = W_1(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

$$W_2(x) = W_2(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

其中 $W_1(x_0)\neq0$，$W_2(x_0)\neq0$，所以

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)}=\frac{W_1(x_0)}{W_2(x_0)}\neq0.$$

【265】 设函数 $y_1(x),y_2(x)$是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 在区间$[a,b]$上的一个基本解组. 试证：方程的系数 $p(x)$和 $q(x)$能够由这个基本解组惟一地确定.

证 根据刘维尔公式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1''+q(x)y_1 & y_2''+q(x)y_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -p(x)y_1' & -p(x)y_2' \end{vmatrix} \\ &= (-p(x))\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= -p(x)W[y_1(x),y_2(x)]\end{aligned}$$

所以

$$p(x)=-\frac{y_1y_2''-y_2y_1''}{W[y_1(x),y_2(x)]}\ ,\quad x\in[a,b]$$

同理，有

$$q(x)=\frac{y_1'y_2''-y_2'y_1''}{W[y_1(x),y_2(x)]}\ ,\quad x\in[a,b]$$

故 $p(x)$和 $q(x)$能够由基本解组惟一地确定.

【266】 函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$定义在$[a,b]$上且具有 n 阶导数，并且当 $x\in[a,b]$时，它们的朗斯基行列式 $W(x)\neq0$，则以这 n 个函数为基本解组的 n 阶线性齐次微分方程为

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) & y'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

即

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

其中

$$p_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n)}(x) & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}}{-W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)]}$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_n(x) = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ y_1''(x) & \cdots & y_{n-1}''(x) & y_n''(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n)}(x) & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}}{W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)]} \qquad (3)$$

证　将 $y = y_i(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 分别代入方程(1)中，注意到每次均有两列重合，于是在 $[a, b]$ 上有

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) & y_i(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) & y_i'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y_i^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

即 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$是方程(1)的解．又因为当 $x\in[a,b]$时，$W[y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)]\neq 0$，故 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是(1)的基本解组．将(1)左端的行列式按最后一列展开，其中 $y^{(n)}$的系数为 $W[y_1(x),\cdots,y_n(x)]$，方程两端除以 $W[y_1(x),\cdots,y_n(x)]$，得到方程(2)，其各项系数为(3)．

【267】 试作出以 $1,\sin t,\cos t,t\in(-\infty,+\infty)$为基本解组的线性微分方程．

解 因为

$$W(t)=\begin{vmatrix} 1 & \sin t & \cos t \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & -\sin t & -\cos t \end{vmatrix} = -1\neq 0$$

利用上一题结论，所求方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin t & \cos t & x \\ 0 & \cos t & -\sin t & \dot{x} \\ 0 & -\sin t & -\cos t & \ddot{x} \\ 0 & -\cos t & \sin t & \dddot{x} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

这里 $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$，$\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dddot{x}=\dfrac{d^3x}{dt^3}$．由(1)式得

$$\dddot{x}+\dot{x}=0.$$

【268】 假设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐次线性方程

$$\ddot{x}+a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x=0$$

的解，这里 $a_1(t)$和 $a_2(t)$是区间$[a,b]$上的连续函数. 试证：$x_2(t)$为方程的解的充要条件是

$$\dot{W}[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0$$

其中 $W[x_1,x_2]$表示 $x_1(t),x_2(t)$的朗斯基行列式.

证　充分性. 因为

$$\dot{W}[x_1,x_2]=\begin{vmatrix}\dot{x}_1 & \dot{x}_2\\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\dot{W}[x_1,x_2]+a_1(t)W[x_1,x_2]\\ &=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2\end{vmatrix}+a_1(t)\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ \ddot{x}_1+a_1(t)\dot{x}_1 & \ddot{x}_2+a_1(t)\dot{x}_1\end{vmatrix}\\ &=0\end{aligned}$$

而 $x_1(t)\neq0$ 是已知方程的解，所以

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ -a_2(t)x_1 & \ddot{x}_2+a_1(t)\dot{x}_2\end{vmatrix}\\ &=x_1\begin{vmatrix}1 & x_2\\ -a_2(t) & \ddot{x}_2+a_1(t)\dot{x}_2\end{vmatrix}=0\end{aligned}$$

故有

$$\ddot{x}_2+a_1(t)\dot{x}_2+a_2(t)x_2=0$$

即 $x_2(t)$是已知方程的解.

必要性. 因为 $W[x_1,x_2]$为方程的解 $x_1(t),x_2(t)$的朗斯基行列式

$$\dot{W}[x_1,x_2]=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \ddot{x}_1+a_2(t)x_1 & \ddot{x}_2+a_2(t)x_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -a_1(t)\dot{x}_1 & -a_1(t)\dot{x}_2 \end{vmatrix}$$

$$=-a_1(t)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}$$

$$=-a_1(t)W[x_1,x_2]$$

即 $W[x_1,x_2]$满足

$$\dot{W}[x_1,x_2]+a_1(t)W[x_1,x_2]=0.$$

【269】 设 $x=x_1(t)$, $x=x_2(t)$是方程

$$\ddot{x}+x=0$$

的满足初始条件

$$x_1(0)=0,\quad \dot{x}_1(0)=1$$

$$x_2(0)=1,\quad \dot{x}_2(0)=0$$

的解. 试不具体求出 $x_1(t)$, $x_2(t)$而直接证明:

1) $\dot{x}_1(t)=x_2(t),\dot{x}_2(t)=-x_1(t)$;

2) $x_1^2(t)+x_2^2(t)\equiv 1$.

证 1) 因为$\ddot{x}_1(t)+x_1(t)=0$, $x_1(0)=0,\dot{x}_1(0)=1$, 设

$$\dot{x}_1(t)=y(t)$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-x_1(t)$$

并且有

$$y'(0)=0,\quad y(0)=1$$

消去 $x_1(t)$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+y(t)=0$$

它满足初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 的解 $y(t)$是惟一的. 由于 $x_2(t)$是$\ddot{x}(t)+x(t)=0$ 的满足 $x_2(0)=1,\dot{x}_2(0)=0$ 的解，所以

$$y(t)\equiv x_2(t)$$

因此

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\quad \dot{x}_2(t)=-x_1(t)$$

2）因为

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) & \dot{x}_2(0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

又由 1)，有

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\quad \dot{x}_2(t)=-x_1(t)$$

所以

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_2(t) & -x_1(t) \end{vmatrix}=-1$$

即得

$$x_1^2(t)+x_2^2(t)\equiv 1.$$

【270】 二阶线性方程的边值问题：

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) & (1) \\ y(0)=y(1)=0 & (2) \end{cases}$$

其中 $p(x),q(x),f(x)$在$[0,1]$上连续．求证：

1）方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{3}$$

的满足边值条件(2)的任意两个解都是线性相关的；

2）对于任意 $f(x)$，问题(1)、(2)有惟一解的充要条件是问题(3)，(2)只有零解．

证 1）设 $y_1(x),y_2(x)$是方程(3)的满足条件(2)的任意两个解．根据刘维尔公式，有

$$W(x)=W(0)\,e^{-\int_0^x p(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

即

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} e^{-\int_0^x p(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

因为 $y_1(0)=0$，$y_2(0)=0$，故

$$W(x)=0$$

所以，$y_1(x)$和 $y_2(x)$是线性相关的．

2）充分性．用反证法．设 $y_1(x),y_2(x)(y_1(x)\not\equiv y_2(x))$是方程(1)的满足条件(2)的两个解，构造函数

$$\tilde{y}(x)=y_1(x)-y_2(x)$$

则 $\tilde{y}(x)\not\equiv 0$ 是方程(3)的满足条件(2)的解，与问题(3)、(2)只有零解矛盾．

必要性．设 $y_1(x)$是方程(1)满足条件(2)的惟一解．用反证法．设有 $y_2(x)\not\equiv 0$ 是方程(3)满足条件(2)的解，构造函数

$$\bar{y}(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

则 $\bar{y}(x)$ 也是方程(1)的满足条件(2)的解，与已知问题(1)、(2)有惟一解矛盾.

【271】 设 $x(t)$ 是方程 $\ddot{x}(t)+a_1(t)\dot{x}(t)+a_2(t)x(t)=0$ 的非零解. 试证：当 $x(t_0)=0$ 时，$\dot{x}(t_0)\neq 0$

证　用反证法. 若 $\dot{x}(t_0)=0$，因为 $x\equiv 0$ 是初值问题：

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)+a_1(t)\dot{x}(t)+a_2(t)x(t)=0\\ x(t_0)=\dot{x}(t_0)=0\end{cases}\tag{1}$$

的解，由解的惟一性，初值问题(1)没有非零解，与题设矛盾. 因而 $\dot{x}(t_0)\neq 0$.

【272】 证明定理 8.

证　n 阶非齐次线性微分方程

$$x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)x(t)=f(t)\tag{1}$$

对应的齐次方程

$$x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)x(t)=0\tag{2}$$

在 $[a,b]$ 上存在 n 个线性无关的解，设为 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$，并且设 $\bar{x}(t)$ 是方程(1)在 $[a,b]$ 上的特解. 下证 $x_1(t)+\bar{x}(t),\cdots,x_n(t)+\bar{x}(t)$，$\bar{x}(t)$ 是(1)的 $n+1$ 个解，且在 $[a,b]$ 上线性无关. 显然，$x_1(t)+\bar{x}(t),\cdots,x_n(t)+\bar{x}(t)$ 是(1)的解. 设存在不全为零的数 $C_1,C_2,\cdots,C_{n+1}$，使得 $t\in[a,b]$

$$C_1(x_1+\bar{x})+C_2(x_2+\bar{x})+\cdots+C_n(x_n+\bar{x})+C_{n+1}\bar{x}=0$$

即

$$(C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n)+(C_1+C_2+\cdots+C_{n+1})\bar{x}=0$$

因此必有

$$C_1+C_2+\cdots+C_{n+1}=0$$

否则 $\bar{x}$ 可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表出，与 $\bar{x}$ 是(1)的特解矛盾.从而

$$C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n=0$$

因为 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在$[a,b]$上线性无关，故

$$C_1=C_2=\cdots=C_n=C_{n+1}=0$$

所以，$x_1(t)+\bar{x}(t),x_2(t)+\bar{x}(t),\cdots,x_n(t)+\bar{x}(t),\bar{x}(t)$是方程(1)的在区间$[a,b]$上的 $n+1$ 个线性无关的解.

再证明方程(1)最多存在 $n+1$ 个线性无关的解. 设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_{n+2}(t)$是(1)的任意 $n+2$ 个解，显然，$x_1(t)-x_{n+2}(t),x_2(t)-x_{n+2}(t),\cdots,x_{n+1}(t)-x_{n+2}(t)$是齐次方程(2)的 $n+1$ 个解. 则由定理 7，这 $n+1$ 个解一定是线性相关的，即存在不全为零的数 $C_1,C_2,\cdots,C_{n+1}$使在区间$[a,b]$上

$$C_1[x_1(t)-x_{n+2}(t)]+C_2[x_2(t)-x_{n+2}(t)]+\cdots+C_{n+1}[x_{n+1}(t)-x_{n+2}(t)]\equiv 0$$

我们就有 $t\in[a,b]$

$$C_1x_1(t)+\cdots+C_{n+1}x_{n+1}(t)-(C_1+C_2+\cdots+C_{n+1})x_{n+2}(t)\equiv 0$$

所以这 $n+2$ 个解在$[a,b]$上是线性相关的. 定理 8 证毕.

【273】 设 $x_1(t),\cdots,x_{n+1}(t)$是非齐次线性方程

$$x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)x(t)=f(t) \quad (1)$$

的在区间$[a,b]$上的 $n+1$ 个线性无关的解，则方程(1)在区间$[a,b]$上的任何解 $x(t)$，都可以表示为

$$x(t)=C_1x_1(t)+\cdots+C_nx_n(t)+C_{n+1}x_{n+1}(t)$$

其中

$$C_1+C_2+\cdots+C_n+C_{n+1}=1$$

反过来，若 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$是(1)在区间$[a,b]$上的 $n+1$ 个线性无关的解，则 $C_1x_1+\cdots+C_{n+1}x_{n+1}$必为(1)在区间$[a,b]$上的解，其中

$$C_1+C_2+\cdots+C_n+C_{n+1}=1$$

证　构造函数 $x_1-x_{n+1},x_2-x_{n+1},\cdots,x_n-x_{n+1}$. 显然，它们是(1)所对应的齐次方程

$$x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)x(t)=0 \tag{2}$$

的 n 个解，并且在区间$[a,b]$上线性无关. 若不然，假设存在一组不全为零的数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，使得 $t\in[a,b]$

$$C_1(x_1-x_{n+1})+\cdots+C_n(x_n-x_{n+1})=0$$

即

$$C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n-(C_1+C_2+\cdots+C_n)x_{n+1}=0$$

与 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$在$[a,b]$上是线性无关的矛盾. 因此，由定理 10，(1)的任一解 $x(t)$可以表示为

$$\begin{aligned}x(t)=&C_1(x_1-x_{n+1})+C_2(x_2-x_{n+1})+\cdots+C_n(x_n-x_{n+1})\\&+x_{n+1}\\=&C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n+(1-C_1-C_2-\cdots-C_n)x_{n+1}\end{aligned}$$

令 $C_{n+1}=1-C_1-C_2-\cdots-C_n$，则

$$x(t)=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n+C_{n+1}x_{n+1}$$

其中

$$C_1+C_2+\cdots+C_{n+1}=1$$

反过来，若 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$是(1)在区间$[a,b]$上的 $n+1$ 个线性无关的解，设

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_{n+1}x_{n+1} \\
&= C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n + (1 - C_1 - C_2 - \cdots - C_n)x_{n+1} \\
&= C_1(x_1 - x_{n+1}) + C_2(x_2 - x_{n+1}) + \cdots + C_n(x_n - x_{n+1}) + x_{n+1}
\end{aligned}
$$

因为 $C_1(x_1 - x_{n+1}) + C_2(x_2 - x_{n+1}) + \cdots + C_n(x_n - x_{n+1})$是齐次方程(2)的解，所以 $x(t)$是非次方程(1)在区间$[a,b]$上的解.

【274】 已知方程

$$
(p(x)u')' + q(x)u = 0 \tag{1}
$$

其中 $p'(x),q(x)$是$[a,b]$上的连续函数，$p(x)\neq 0$. 若$u(x)$，$v(x)$为(1)的两个解，则 $p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x))$恒等于常数.

证 方程(1)即为下面的方程

$$
p(x)u'' + p'(x)u' + q(x)u = 0
$$

$x_0\in[a,b]$，根据刘维尔公式，有

$$
\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)
$$

$$
= W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{p'(\tau)}{p(\tau)}\mathrm{d}\tau} = W(x_0)\frac{p(x_0)}{p(x)}
$$

故 $p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x))$恒为常数.

【275】 已知二阶线性齐次方程

$$
y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}
$$

其中 $p(x),q(x)$在$[a,b]$上连续，设 y_1 是(1)的一个非零特解，求它的通解.

解 设 $x_0\in[a,b]$，y 是方程(1)不同于 y_1 的另一解，满足

$$W(x_0)=W[y_1(x_0),y(x_0)]=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y(x_0) \\ y_1'(x_0) & y'(x_0) \end{vmatrix}=1$$

根据刘维尔公式有

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}$$

即

$$y_1y' - y_1'y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x} \tag{2}$$

这是一个关于 y 的一阶线性方程，易求得它的通解

$$y = y_1\int \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2(x)}\,\mathrm{d}x + Cy_1\text{ ，　（}C\text{ 为任意常数）}$$

取 $C=0$ 得一特解

$$y_2(x) = y_1\int \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

由(2)知 $y_1(x),y_2(x)$在$[a,b]$上线性无关，从而可得方程(1)的通解

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\qquad (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

【276】 考虑微分方程

$$y''+q(x)y=0$$

其中 $q(x)$在$[a,b]$上连续.

1）设 $y=\varphi(x)$与 $y=\psi(x)$是它的任意两个解，定义区间为$[a,b]$. 试证：$\varphi(x)$与 $\psi(x)$的朗斯基行列式在$[a,b]$上恒等于一个常数；

2）设已知方程有一个特解 $y=e^x$，试求方程的通解，并确定 $q(x)$.

证　1）任取 $x_0\in[a,b]$，根据刘维尔公式，当 $x\in[a,b]$

$$W[\varphi(x),\psi(x)]=\begin{vmatrix}\varphi(x) & \psi(x)\\ \varphi'(x) & \psi'(x)\end{vmatrix}=W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x}0\mathrm{d}x}$$

$$=W(x_0)\quad(\text{常数})$$

2）由习题 275 的结论，方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^x\int\frac{1}{e^{2x}}\mathrm{d}x=C_1e^x+C_3e^{-x}$$

其中 $C_3=-\frac{1}{2}C_2$.

再根据习题 265 的结论，可得

$$q(x)=\frac{(e^x)'(e^{-x})''-(e^{-x})'(e^x)''}{W[e^x,e^{-x}]}=-1.$$

【277】 若两方程

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \tag{1}$$

$$y''+q_1(x)y'+q_2(x)y=0 \tag{2}$$

在$[a,b]$上有一公共解，试求出此解，并分别求出这两个方程的通解.

解 设 $\tilde{y}(x)$是方程(1)和(2)在$[a,b]$上的公共解，则$\tilde{y}(x)$满足

$$(p_1(x)-q_1(x))\tilde{y}'+(p_2(x)-q_2(x))\tilde{y}=0 \tag{3}$$

设 $\tilde{y}(x_0)=y_0,x_0\in[a,b]$，求解(3)式得

$$\tilde{y}(x)=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}\mathrm{d}x}$$

根据习题 275 的结论，得到方程(1)和(2)的通解分别为

$$y(x)=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}\mathrm{d}x}\left[C_1+C_2\int\frac{e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(x)\mathrm{d}x}}{\left(y_0e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x\right]$$

和

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}\mathrm{d}x}\left[C_1 + C_2\int \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} q_1(x)\mathrm{d}x}}{\left(y_0 e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x\right]$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

【278】 已知 $\tilde{y}_1(x) = -e^{x^2}$，$\tilde{y}_2(x) = e^{x^2}(e^x - 1)$是方程

$$y'' - 4xy' - (3-4x^2)y = e^{x^2}$$

在$(-\infty, +\infty)$上的两个特解,试求出此方程的通解.

解 $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_2(x) - \tilde{y}_1(x) = e^x e^{x^2}$是原方程对应的齐次方程

$$y'' - 4xy' - (3-4x^2)y = 0 \tag{1}$$

的解，根据习题 275 的结论，可得(1)通解为

$$y(x) = C_1 e^x e^{x^2} + C_2 e^x e^{x^2}\int \frac{1}{(e^x e^{x^2})^2} e^{-\int(-4x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

将上式右端求出积分，化简得(1)的通解为

$$y = (C_1 e^x + C_3 e^{-x})e^{x^2}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

这样由定理 10 知原方程的通解为

$$y(x) = (C_1 e^x + C_3 e^{-x})e^{x^2} - e^{x^2}.$$

【279】 设 $x_1(t), x_2(t)$是方程$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0$的解，且 $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t) \not\equiv 0$,其中 $a_1(t)$和 $a_2(t)$是含 t_0 的区间上的连续函数. 试证：存在常数 C，使得在该区间上

$$x_2(t) \equiv C x_1(t).$$

证 根据刘维尔公式，有

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) \end{vmatrix} e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

$$=0$$

则由定理 4 知在含 t_0 的区间上，$x_1(t),x_2(t)$线性相关，即存在不全为零的常数 C_1,C_2 使在该区间上

$$C_1x_1(t)+C_2x_2(t)\equiv 0$$

因为由题设 $x_1(t)\not\equiv 0$，则 $C_2\neq 0$，取 $C=-\dfrac{C_1}{C_2}$，即有

$$x_2(t)=Cx_1(t).$$

【280】 已知方程$\ddot{x}-x=0$ 在$(-\infty,+\infty)$上有基本解组 e^t,e^{-t}，试求此方程适合初始条件：

$$x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=0$$

$$x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1$$

的基本解组，并求出方程适合初始条件：

$$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=x_0^1$$

的解.

解 因为 e^t,e^{-t}是已知方程在$(-\infty,+\infty)$上的基本解组，设

$$x_1(t)=C_1^{(1)}e^t+C_2^{(1)}e^{-t}$$

$$x_2(t)=C_1^{(2)}e^t+C_2^{(2)}e^{-t}$$

将初始条件 $x(0)=1$，$\dot{x}(0)=0$ 代入 $x_1(t)$，得

$$C_1^{(1)}=\frac{1}{2},\quad C_2^{(1)}=\frac{1}{2}$$

将 $x(0)=0$，　$\dot{x}(0)=1$ 代入 $x_2(t)$，得

$$C_1^{(2)}=\frac{1}{2},\quad C_2^{(2)}=-\frac{1}{2}$$

所以

$$x_1(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}=\mathrm{ch}t$$

$$x_2(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}=\mathrm{sh}t$$

显然，$x_1(t),x_2(t)$是已知方程的解，并且在$(-\infty,+\infty)$上线性无关,故构成已知方程的适合初始条件的基本解组.

设

$$\tilde{x}(t)=C_1\mathrm{ch}t+C_2\mathrm{sh}t$$

将 $x(0)=x_0,\dot{x}(0)=x_0^1$ 代入上式,得

$$C_1=x_0,\quad C_2=x_0^1$$

所以，所求适合初始条件：

$$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=x_0^1$$

的解为

$$\tilde{x}(t)=x_0\mathrm{ch}t+x_0^1\mathrm{sh}t.$$

【281】 设 $\tilde{y}_1(x)=3e^x+e^{x^2}$，$\tilde{y}_2(x)=7e^x+e^{x^2}$，$\tilde{y}_3(x)=5e^x-e^{-x^3}+e^{x^2}$是二阶线性方程

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=q(x)$$

的三个解，试求此方程满足初始条件：

$$y(0)=1,\quad y'(0)=2$$

的解

解 容易验证函数组 $\tilde{y}_1(x),\tilde{y}_2(x),\tilde{y}_3(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是线性无关的，故 $\tilde{y}_3(x)-\tilde{y}_1(x),\tilde{y}_3(x)-\tilde{y}_2(x)$构成已知方程对应的齐次方程的基本解组，因此，已知方程的任意一个解 $y(x)$，均可以表示为

$$y(x)=C_1(\tilde{y}_3(x)-\tilde{y}_1(x))+C_2(\tilde{y}_3(x)-\tilde{y}_2(x))+\tilde{y}_1(x)$$
$$=(2C_1-2C_2+3)e^x-(C_1+C_2)e^{-x^3}+e^{x^2}$$

将初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 代入上式，得

$$C_1=\frac{3}{4},\quad C_2=\frac{5}{4}$$

所以，所求的解为

$$y(x)=2e^x-2e^{-x^3}+e^{x^2}.$$

§4.2 常系数齐次线性微分方程

提 要

定义 1 方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \tag{1}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$都是实常数，称为 n 阶常系数非齐次线性微分方程. 如果 $f(x)\equiv 0$,即

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny\equiv 0 \tag{2}$$

称为对应于方程(1)的 n 阶常系数齐次线性微分方程.

定义 2 多项式

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

称为方程(2)的特征多项式. 称 $p(\lambda)=0$ 的根为方程(2)的特

征根.

定理 1　如果方程(2)有两两互异的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$，它们的重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_p,m_i\geqslant 1$，且 $m_1+m_2+\cdots+m_p=n$，则与它们对应的(2)的特解是

$$\left.\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \cdots, & x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}; \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \cdots, & x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x}; \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{\lambda_p x}, & xe^{\lambda_p x}, & \cdots, & x^{m_p-1}e^{\lambda_p x}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

且(3)构成方程(2)在$(-\infty,+\infty)$上的基本解组.

定义 3　设函数 $f(t)$在区间$[0,+\infty)$上有定义，如果含参变量 s 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\mathrm{d}t = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

对 s 的某一取值范围是收敛的,则称

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

为函数 $f(t)$的拉普拉斯(Laplace)变换，$f(t)$称为原函数，$F(s)$称为象函数，并且记为

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$$

这时 $F(s)$的拉普拉斯逆变换为 $f(t)$，记作

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

定理 2　设函数 $f(t)$在区间$[0,+\infty)$上逐段连续，且存在常数 $M>0$，$s_0\geqslant 0$,使得对于一切 $t\geqslant 0$，有$|f(t)|<Me^{s_0t}$，则当 $s>s_0$ 时,$F(s)$存在.

定理 3　设 $f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且存在常数 $M>0$ 及 $s_0\geqslant 0$，使对于 $t\in[0,+\infty)$，$|f(t)|<Me^{s_0t}$，又设 $f(t)$的导

数$f'(t)$在$[0,+\infty)$上存在并在$[0,+\infty)$的每个有限子区间上逐段连续，则当$s>s_0$时导数$f'(t)$的拉普拉斯变换存在，并且

$$\mathcal{L}[f'(t)]=s\mathcal{L}[f(t)]-f(0)\quad(s>s_0)\tag{4}$$

将(4)式用于二阶导数$f''(t)$得

$$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2\mathcal{L}[f(t)]-sf(0)-f'(0)$$

一般地，有

定理 4 设$f(t)$及它的直至$n-1$阶导数在$[0,+\infty)$上连续，且存在常数$M>0$及$s_0\geqslant 0$，使对于$t\in[0,+\infty)$，$|f(t)|<Me^{s_0t}$，又设$f^{(n)}(t)$在$[0,+\infty)$上存在，并在$[0,+\infty)$的每个有限子区间上逐段连续，则当$s>s_0$时导数$f^{(n)}(t)$的拉普拉斯变换存在，并且

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^n\mathcal{L}[f(t)]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)\quad(s>s_0)\tag{5}$$

定理 5 拉普拉斯变换还有以下性质：

ⅰ) 线性性质 设$\mathcal{L}[f_1(t)]=F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)]=F_2(s)$，$\alpha,\beta$为任意常数，则

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathcal{L}[f_1(t)]+\beta\mathcal{L}[f_2(t)];$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)].$$

ⅱ) 常见函数的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s},\quad \mathcal{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a},\quad \mathcal{L}(te^{at})=\frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^ne^{at})=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

其它函数的拉普拉斯变换可参看拉普拉斯变换表，这里不再一一详列.

ⅲ) 位移性质 若$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=e^{at}f(t)$$

ⅳ）积分性质　若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

………………

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^t \mathrm{d}\tau\cdots\int_0^t}_{n\text{次}} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s^n}F(s).$$

题　解

【282】 求解下列常系数齐次线性方程

1）$4y'-3y=0$；

2）$y''-4y'=0$；

3）$y''+9y'+20y=0$；

4）$y'''-2y''-y'+2y=0$.

解　1）特征方程为

$$4\lambda-3=0$$

特征根为 $\lambda=\dfrac{3}{4}$，故所求通解为

$$y=Ce^{\frac{3}{4}x}$$

其中 C 为任意常数.

[注]：下面题目中出现在通解中的 $C_i(i=1,2,\cdots)$ 均为任意常数，不再说明.

2）特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda=0$$

特征根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$，故所求通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}.$$

3）特征方程为

$$\lambda^2+9\lambda+20=0$$

特征根为 $\lambda_1=-4$，$\lambda_2=-5$，故所求通解为

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-5x}.$$

4）特征方程为

$$\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0$$

上式因式分解为

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)=0$$

特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$，故所求通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}.$$

【283】 求解下列常系数齐次线性方程：

1）$y''+2y=0$；

2）$y''+4y'+13y=0$；

3）$y'''-y=0$；

4）$y'''+3y'-4y=0$；

5）$y'''-y''+y'-y=0$；

6）$y'''-2y''-3y'+10y=0$；

7）$y^{(4)}+y=0$；

8）$y^{(6)}-2y^{(4)}-y''+2y=0$.

解 1）特征方程为

$$\lambda^2+2=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2}i$，故所求通解为

$$y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x.$$

2）特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+13=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=-2\pm 3i$，故所求通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

3) 特征方程为

$$\lambda^3-1=0$$

特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，故所求通解为

$$y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

4) 特征方程为

$$\lambda^3+3\lambda-4=0$$

因式分解为

$$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+4)=0$$

特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i$，故所求通解为

$$y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right).$$

5) 特征方程为

$$\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0$$

因式分解为

$$(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$$

特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=\pm i$，故所求通解为

$$y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

6) 特征方程为

$$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda+10=0$$

因式分解为

$$(\lambda+2)(\lambda^2-4\lambda+5)=0$$

特征根为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_{2,3}=2\pm i$，故所求通解为

$$y=C_1e^{-2x}+e^{2x}(C_2\cos x+C_3\sin x).$$

7）特征方程为

$$\lambda^4+1=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i,\lambda_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$，故所求通解为

$$y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x)$$

$$+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x).$$

8）特征方程为

$$\lambda^6-2\lambda^4-\lambda^2+2=0$$

因式分解为

$$(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$$

特征根为 $\lambda_1=\sqrt{2},\lambda_2=-\sqrt{2},\lambda_3=1,\lambda_4=-1,\lambda_{5,6}=\pm i$，故所求通解为

$$y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+C_3e^x+C_4e^{-x}+C_5\cos x+C_6\sin x.$$

【284】 求解下列常系数齐次线性方程：

1）$y''-2y'+y=0$;

2）$y'''-y''-y'+y=0$;

3）$y'''-3ay''+3a^2y'-a^3y=0$;

4）$y^{(4)}-y''=0$;

5）$y^{(4)}-4y'''+8y''-8y'+3y=0$;

6）$y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=0$

解 1）特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+1=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=1$(二重)，故所求通解为

$$y=e^{x}(C_1+C_2x).$$

2）特征方程为

$$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$$

因式分解为

$$(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$$

特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_{2,3}=1$(二重)，故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+e^{x}(C_2+C_3x).$$

3）特征方程为

$$\lambda^3-3a\lambda^2+3a^2\lambda-a^3=0$$

即

$$(\lambda-a)^3=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2,3}=a$(三重)，故所求通解为

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{ax}$$

4）特征方程为

$$\lambda^4-\lambda^2=0$$

特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_{3,4}=0$(二重)，故所求通解为

$$y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4e^{x}.$$

5）特征方程为

$$\lambda^4-4\lambda^3+8\lambda^2-8\lambda+3=0$$

因式分解为

$$(\lambda-1)^2(\lambda^2-2\lambda+3)=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=1$(二重)，$\lambda_{3,4}=1\pm\sqrt{2}i$，故所求通解为

$$y=e^{x}(C_1+C_2x)+e^{x}(C_3\cos\sqrt{2}x+C_4\sin\sqrt{2}x).$$

6）特征方程为

$$\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-4\lambda+1=0$$

即

$$(\lambda-1)^4=0$$

特征根为 $\lambda=1$(四重)，故所求通解为

$$y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3).$$

【285】 求解下列常系数齐次线性方程:

1) $y^{(4)}+2y''+y=0$;

2) $y^{(4)}+4y'''+8y''+8y'+4y=0$;

3) $y^{(5)}+2y'''+y'=0$.

解 1) 特征方程为

$$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$$

即

$$(\lambda^2+1)^2=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=i$(二重)，$\lambda_{3,4}=-i$(二重)，故所求通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

2) 特征方程为

$$\lambda^4+4\lambda^3+8\lambda^2+8\lambda+4=0$$

即

$$(\lambda^2+2\lambda+2)^2=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=-1+i$(二重)，$\lambda_{3,4}=-1-i$(二重)，故所求通解为

$$y=e^{-x}[(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x].$$

3) 特征方程为

$$\lambda^5+2\lambda^3+\lambda=0$$

即

$$\lambda(\lambda^2+1)^2=0$$

特征根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=i$(二重)，$\lambda_{4,5}=-i$(二重)，故所求通

解为

$$y=C_1+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

【286】 求下列各方程满足给定初始条件的解：

1) $y''-3y'+2y=0$；$y(0)=2$，$y'(0)=-3$；

2) $y''+4y'+4y=0$；$y(2)=4$，$y'(2)=0$；

3) $y''+y'=0$；$y(0)=2$，$y'(0)=5$；

4) $y''-5y'+4y=0$；$y(0)=5$，$y'(0)=8$；

5) $y^{(4)}-y=0$；$y(0)=2$，$y'(0)=-1$，$y''(0)=-2$，$y'''(0)=1$.

解 1) 特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，所以，通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x} \tag{1}$$

将初始条件代入(1)及

$$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}$$

中，得

$$C_1=7,\quad C_2=-5$$

故所求特解为

$$y=7e^x-5e^{2x}.$$

2) 特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

$\lambda=-2$ 是二重特征根，所以，通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x} \tag{2}$$

将初始条件代入(2)及

$$y'=(-2C_1+C_2-2C_2x)e^{-2x}$$

中,得

$$C_1=-12e^4,\quad C_2=8e^4$$

故所求特解为

$$y=-12e^{-2(x-2)}+8xe^{-2(x-2)}.$$

3）特征方程为

$$\lambda^2+\lambda=0$$

特征根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，所以，通解为

$$y=C_1+C_2e^{-x} \tag{3}$$

将初始条件代入(3)及

$$y'=-C_2e^{-x}$$

中,得

$$C_1=7,\quad C_2=-5$$

故所求特解为

$$y=7-5e^{-x}.$$

4）特征方程为

$$\lambda^2-5\lambda+4=0$$

特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，所以，通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{4x} \tag{4}$$

将初始条件代入(4)及

$$y'=C_1e^x+4C_2e^{4x}$$

中,得

$$C_1=4,\quad C_2=1$$

故所求特解为

$$y=4e^x+e^{4x}.$$

5）特征方程为

$$\lambda^4-1=0$$

特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_{3,4}=\pm i$, 所以，通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x \tag{5}$$

将初始条件代入(5)及

$$y'=C_1e^x-C_2e^{-x}-C_3\sin x+C_4\cos x$$

$$y''=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x$$

$$y'''=C_1e^x-C_2e^{-x}+C_3\sin x-C_4\cos x$$

中,得

$$C_1=0,\quad C_2=0,\quad C_3=2,\quad C_4=-1$$

故所求特解为

$$y=2\cos x-\sin x.$$

【287】 用拉普拉斯变换法求解下列初值问题:

1) $y''-y'-6y=0$; $y(0)=1, y'(0)=-1$;

2) $y''-4y'+4y=0$; $y(0)=1, y'(0)=1$;

3) $y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=0$; $y(0)=y''(0)=0$, $y'(0)=y'''(0)=1$.

解　1) 设 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$, 方程两端同时进行拉普拉斯变换，由定理 3,4 得到

$$s^2Y(s)-s+1-sY(s)+1-6Y(s)=0$$

整理得

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2-s-6}=\frac{1}{5}\,\frac{1}{s-3}+\frac{4}{5}\,\frac{1}{s+2}$$

再求拉普拉斯逆变换，得所求初值问题的解

$$y(t)=\frac{1}{5}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t}$$

2) 方程两端同时进行拉普拉斯变换，得到

$$s^2Y(s)-s-1-4sY(s)+4+4Y(s)=0$$

整理得

$$Y(s)=\frac{s-3}{s^2-4s+4}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}$$

求逆变换，得所求解

$$y(t)=e^{2t}-te^{2t}$$

3) 方程两端同时进行拉普拉斯变换，得到

$$s^4Y(s)-s^2-1-4s^3Y(s)+4s+6s^2Y(s)$$
$$-6-4sY(s)+Y(s)=0$$

整理得

$$Y(s)=\frac{s^2-4s+7}{s^4-4s^3+6s^2-4s+1}$$
$$=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{2}{(s-1)^3}+\frac{2}{3}\frac{6}{(s-1)^4}$$

再求逆变换，所求解为

$$y(t)=(t-t^2+\frac{2}{3}t^3)e^t.$$

【288】 $y(x)$是四阶线性齐次方程，系数是实常数，已知$y(x)$的一个解是 x^3e^{-x}，求其通解，并确定该方程.

解 若 x^3e^{-x}是解，则 x^2e^{-x},xe^{-x},e^{-x}也是解. 它们构成一个四阶常系数齐次微分方程的基本解组,故通解为

$$y(x)=C_1x^3e^{-x}+C_2x^2e^{-x}+C_3xe^{-x}+C_4e^{-x}$$

由此得到，-1 是所求方程的特征方程的四重根，即

$$(\lambda+1)^4=0$$

展开得

$$\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1=0$$

因而,所求方程为

$$y^{(4)}+4y'''+6y''+4y'+y=0.$$

【289】 $y(x)$是四阶线性齐次微分方程，系数是实常数，已知$y(x)$的两个解是$\cos 4x$和$\sin 3x$，求其通解，并确定该方程.

解　若$\cos 4x$和$\sin 3x$是解，则$\sin 4x$和$\cos 3x$也是解，它们构成一个四阶线性齐次方程的基本解组，故通解为

$$y(x)=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$$

因此，$\pm 4i,\pm 3i$是所求方程的特征方程的共轭复根，即

$$(\lambda^2+16)(\lambda^2+9)=0$$

展开得

$$\lambda^4+25\lambda^2+144=0$$

所以，所求方程为

$$y^{(4)}+25y''+144y=0.$$

【290】 $y(x)$是四阶线性齐次微分方程，系数是实常数，已知$y(x)$的一个解是$x\cos 4x$，求其通解，并确定该方程.

解　若$x\cos 4x$是解，则$x\sin 4x,\cos 4x$和$\sin 4x$也是解，它们构成一个四阶常系数齐次线性方程的基本解组，故所求通解为

$$y(x)=C_1x\cos 4x+C_2x\sin 4x+C_3\cos 4x+C_4\sin 4x$$

因此，$\pm 4i$是所求方程的特征方程的二重共轭复根，即

$$(\lambda^2+16)^2=0$$

展开得

$$\lambda^4+32\lambda^2+256=0$$

所以，所求方程为

$$y^{(4)}+32y''+256y=0.$$

【291】 试讨论λ为何值时，$y''+\lambda y=0$存在满足$y(0)=$

$y(1)=0$ 的非零解.

解 已知方程的特征方程为

$$\mu^2+\lambda=0$$

下面分三种情况讨论:

i) 若 $\lambda<0$, 此时特征根为 $\mu_1=\sqrt{-\lambda}$, $\mu_2=-\sqrt{-\lambda}$, 所以, 通解为

$$y=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{1}$$

其中 C_1,C_2 为任意常数. 将 $y(0)=y(1)=0$ 代入(1)中, 得到方程组

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}}=0\end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\sqrt{-\lambda}} & e^{-\sqrt{-\lambda}}\end{vmatrix}=e^{-\sqrt{-\lambda}}-e^{\sqrt{-\lambda}}\neq0$$

上述方程组只有零解, 即 $C_1=C_2=0$. 所以, 当 $\lambda<0$ 时, 已知方程无满足条件的的非零解.

ii) 若 $\lambda=0$, 此时 $\mu=0$ 为二重特征根, 故通解为

$$y=C_1+C_2x \tag{2}$$

其中 C_1,C_2 为常数. 将 $y(0)=y(1)=0$ 代入(2)中, 得到方程组

$$\begin{cases}C_1=0\\ C_1+C_2=0\end{cases}$$

解之, 得 $C_1=C_2=0$. 所以, 当 $\lambda=0$ 时, 已知方程也无满足条件的非零解.

iii) 若 $\lambda>0$, 此时特征根为 $\mu_1=\sqrt{\lambda}i$, $\mu_2=-\sqrt{\lambda}i$, 所以

通解为

$$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x \tag{3}$$

其中 C_1,C_2 为常数. 将 $y(0)=y(1)=0$ 代入(3)中, 得到方程组

$$\begin{cases}C_1=0\\ C_1\cos\sqrt{\lambda}+C_2\sin\sqrt{\lambda}=0\end{cases}$$

因为 C_1,C_2 不全为零(否则只有零解), 故要求 $C_2\neq0$,则 $\sin\sqrt{\lambda}=0$, 即

$$\lambda=n^2\pi^2,\quad n=\pm1,\pm2,\cdots$$

综上所述, 当 $\lambda=n^2\pi^2,n=\pm1,\pm2,\cdots$时, 已知方程存在满足 $y(0)=y(1)=0$ 的非零解.

【292】 试讨论当 p、q 取什么值时, 方程 $y''+py'+qy=0$ 的一切解当 $x\to+\infty$时, 都趋于零.

解　已知方程的特征方程为

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

特征根为 $\lambda_1=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$, $\lambda_2=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$. 分两种情况讨论:

i) λ_1,λ_2 均为实数, 即 $p^2\geqslant4q$, 此时通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}\quad(p^2>4q,\lambda_1\neq\lambda_2)$$

或

$$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}\quad(p^2=4q,\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$$

要使得

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}(C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x})=0$$

或

$$\lim_{x\to+\infty}(C_1+C_2x)e^{\lambda x}=0$$

因为 C_1,C_2 为任意实数，故要求

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\lambda_1 x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}e^{\lambda_2 x}=0\ \text{或}\ \lim_{x\to+\infty}xe^{\lambda x}=0 \tag{1}$$

当 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$ 时，(1)式成立. 这时，p,q 要满足

$$\begin{cases}p^2\geqslant 4q\\ -\dfrac{p}{2}\pm\dfrac{\sqrt{p^2-4q}}{2}<0\end{cases}$$

解上述不等式组，得

$$p>0,\quad q>0.$$

ii) λ_1,λ_2 为共轭复数，即 $p^2<4q$，此时通解为

$$y=e^{-\frac{p}{2}x}\left(C_1\cos\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}\,x+C_2\sin\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}\,x\right)$$

要使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$，$p,q$ 要满足

$$\begin{cases}p^2<4q\\ -\dfrac{p}{2}<0\end{cases}$$

解之，得

$$p>0,\quad q>0$$

综上所述，当 $p>0,q>0$ 时，已知方程的一切解当 $x\to+\infty$时，都趋向于零.

【293】 试讨论当 p,q 取什么值时，方程 $y''+py'+qy=0$ 的一切解在$[a,+\infty)$上有界，其中 a 是某确定的常数.

解 根据上一题结论，当 $p>0,q>0$ 时，已知方程的一切解 $y(x)$，当 $x\to+\infty$时，都有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$，故此时 $y(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

当 $p=0,q>0$ 时，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{q}i$，通解为

$$y=C_1\cos\sqrt{q}x+C_2\sin\sqrt{q}x$$

故 $y(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

当 $p>0,q=0$ 时，特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-p$，通解为

$$y=C_1+C_2e^{-px}$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-px}=0$$

故 $y(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

当 $p<0,q<0$ 时，特征根为 $\lambda_1=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}>0,\lambda_2=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$，通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\lambda_1x}=+\infty$$

故 $y(x)$在$[a,+\infty)$上无界.

综上所述，当 $p>0,q\geqslant0$ 时或 $p=0,q>0$ 时，已知方程的一切解在$[a,+\infty)$上有界.

§4.3　常系数非齐次线性微分方程

提　要

n 阶常系数非齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)\qquad(1)$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 为已知常数，而 $f(x)$是某区间上的已知连续函

数.

方程(1)有以下四种常用解法:

1 常数变易法

如果已知方程(1)对应的 n 阶齐次方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (2)$$

的基本解组 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$,则(2)的通解为

$$y(x)=C_1y_1(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

可用常数变易法求方程(1)的特解

$$y^*(x)=C_1(x)y_1(x)+\cdots+C_n(x)y_n(x)$$

式中 $C_i(x)(i=1,\cdots,n)$是待定函数, $C_i'(x)(i=1,\cdots,n)$满足以下代数方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\cdots+C_n'(x)y_n(x)=0\\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+\cdots+C_n'(x)y_n'(x)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0\\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x)\end{cases}$$

这个方程组的系数行列式是基本解组 $y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$的朗斯基行列式,所以恒可求出 $C_i'(x)(i=1,\cdots,n)$,通过求积分即可得出 $C_i(x)(i=1,\cdots,n)$.

2 待定系数法

1) 若 $f(x)=(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m)e^{\lambda x}$,其中 λ 及 $b_i(i=0,\cdots,m)$为实常数,则方程(1)有形如

$$y^*(x)=x^k(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_{m-1}x+B_m)e^{\lambda x}$$

的特解,其中若 λ 不是特征根,取 $k=0$,否则 k 等于特征根 λ 的重数;而 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 是待定常数,可以把特解代入方程

(1)，通过比较系数来确定.

2) 若 $f(x)=(A(x)\cos\beta x+B(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$，其中 α,β 为常数，而 $A(x),B(x)$ 是具实系数的 x 的多项式，其中一个次数是 m，另一个次数不超过 m，则方程(1)有形如

$$y^*(x)=x^k(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

的特解. 这里若 $\alpha+i\beta$ 不是特征根，取 $k=0$，否则取 k 等于特征根 $\alpha+i\beta$ 的重数，$P(x),Q(x)$ 均为待定的 x 的 m 次多项式，可以通过比较系数来确定.

3　拉普拉斯变换法

考虑方程(1)满足初始条件：

$$y(0)=y_0,y'(0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(0)=y_{n-1} \tag{3}$$

的初值问题. 先假设此初值问题的解 $y=y(x)$ 满足 §4.2 定理 4 的条件，而 $f(x)$ 满足定理 2 的条件. 作 $y(x),f(x)$ 的拉普拉斯变换，即 $\mathcal{L}[y(x)]=Y(s)$，$\mathcal{L}[f(x)]=F(s)$，则对(1)的两端进行拉普拉斯变换，并注意到初始条件(3). 由 §4.2 定理 4 得 $Y(s)$ 满足以下一次代数方程

$$\begin{aligned}&s^nY(s)-s^{n-1}y_0-s^{n-2}y_1-\cdots-y_{n-1}\\&\quad+a_1(s^{n-1}Y(s)-s^{n-2}y_0-s^{n-3}y_1-\cdots-y_{n-2})\\&\quad+\cdots+a_{n-1}(sY(s)-y_0)+a_nY(s)=F(s)\end{aligned}$$

易解出 $Y(s)$，再求出 $Y(s)$ 的拉普拉斯逆变换

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

可以验证就是所求初值问题的解.

4　算子解法

1) 定义　将 $y(x)$ 的 k 阶导数记作 $D^ky=\dfrac{d^ky}{dx^k}(k=1,2,\cdots)$，称 $D,D^2,\cdots,D^k$ 为微分算子，微分算子 D 的多项式

$$P(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$$

也是一个微分算子. 这样方程(1)可写为

$$P(D)y=f(x) \tag{1)'$$

若

$$P(D)\left(\frac{1}{P(D)}f(x)\right)=f(x)$$

则$\frac{1}{P(D)}$也是一个算子，称为微分算子 $P(D)$的逆算子. 若 $y=y(x)$是(1)或(1)′的解，则 $y(x)=\frac{1}{P(D)}f(x)$. 注意到$\frac{1}{P(D)}f(x)$的结果不是惟一的，它表示一族函数，特别地

$$\frac{1}{D}f(x)=\int f(x)\mathrm{d}x,\ \frac{1}{D^k}f(x)=\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{k}f(x)(\mathrm{d}x)^k$$

2) 微分算子及其逆算子有以下性质与运算公式

i) 线性性质

$$P(D)(C_1f_1(x)+C_2f_2(x))=C_1P(D)f_1(x)+C_2P(D)f_2(x)$$

$$\frac{1}{P(D)}(C_1f_1(x)+C_2f_2(x))=C_1\frac{1}{P(D)}f_1(x)+C_2\frac{1}{P(D)}f_2(x)$$

其中 C_1,C_2 为常数

ii)加法性质

$$[P_1(D)+P_2(D)]f(x)=P_1(D)f(x)+P_2(D)f(x)$$

$$\left[\frac{1}{P_1(D)}+\frac{1}{P_2(D)}\right]f(x)=\frac{1}{P_1(D)}f(x)+\frac{1}{P_2(D)}f(x)$$

iii)乘法

若 $P(D)f(x)=P_1(D)(P_2(D)f(x))$，称 $P(D)$为

$P_1(D)$与 $P_2(D)$的乘积，记作 $P(D)=P_1(D)\cdot P_2(D)$，乘法满足交换率

$$P_1(D)\cdot P_2(D)=P_2(D)\cdot P_1(D).$$

若 $P(D)=P_1(D)\cdot P_2(D)$，则

$$\frac{1}{P(D)}=\frac{1}{P_1(D)}\cdot\frac{1}{P_2(D)}$$

ⅳ）运算公式

(a) $P(D)e^{\lambda x}=P(\lambda)e^{\lambda x}$

$$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda x}=\frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda x}$$

(b) $P(D^2)\sin\beta x=P(-\beta^2)\sin\beta x$

$$\frac{1}{P(D^2)}\sin\beta x=\frac{1}{P(-\beta^2)}\sin\beta x \quad (P(-\beta^2)\neq 0)$$

(c) $P(D^2)\cos\beta x=P(-\beta^2)\cos\beta x$

$$\frac{1}{P(D^2)}\cos\beta x=\frac{1}{P(-\beta^2)}\cos\beta x \quad (P(-\beta^2)\neq 0)$$

(d) $P(D)e^{\lambda x}f(x)=e^{\lambda x}P(D+\lambda)f(x)$

$$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda x}f(x)=e^{\lambda x}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(x)$$

(e) 设 $f_k(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k$，$P(0)=a_n\neq 0$，则

$$\frac{1}{P(D)}f_k(x)=Q_k(D)f_k(x)$$

其中 $Q_k(D)=C_0+C_1D+\cdots+C_kD^k$ 是将$P(D)$按 D 的升幂排列后按普通的除法去除 1 在第 $k+1$ 步上得到的商.

3）算子解法

对算子方程(1)，当

ⅰ）$f(x)=f_k(x)$，其中 $f_k(x)$是 x 的k 次实系数多项式；

ⅱ) $f(x)=e^{\lambda x}f_k(x)$,其中 $f_k(x)$同 ⅰ),λ 为实数;

ⅲ) $f(x)=\cos\beta x f_k(x)$或 $\sin\beta x f_k(x)$,其中 $f_k(x)$同 ⅰ),β 为实数.

则易用算子解法求(1)′的特解.

题　　解

用常数变易法求下列方程的通解(习题 294～习题 301)

【294】 $y''-y=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$

解 已知方程对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-1=0$$

特征根为 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=-1$,故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

下面用常数变易法求已知方程形如

$$y_1=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{-x} \tag{1}$$

的一个特解. $C_1'(x)$,$C_2'(x)$满足下列方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{-x}=0\\ C_1'(x)e^x-C_2'(x)e^{-x}=\dfrac{2e^x}{e^x-1}\end{cases}$$

解之,得

$$C_1'(x)=\frac{1}{e^x-1},\quad C_1(x)=\ln|e^x-1|-x$$

$$C_2'(x)=-\frac{e^{2x}}{e^x-1},\quad C_2(x)=-e^x-\ln|e^x-1|$$

故已知方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(e^x-e^{-x})\ln|e^x-1|-xe^x-1.$$

【295】 $y''+y=2\sec^3 x$.

解 已知方程对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+1=0$$

特征根为 $\lambda=\pm i$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

下面利用常数变易法求已知方程形如

$$y_1=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$$

的一个特解. 可得到 $C_1'(x),C_2'(x)$满足的代数方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0\\-C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=2\sec^3 x\end{cases}$$

解之，得

$$C_1'(x)=-2\sin x\sec^3 x,\quad C_1(x)=-\sec^2 x$$

$$C_2'(x)=2\sec^2 x,\qquad C_2(x)=2\tan x$$

故所求通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

【296】 $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

解 已知方程对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+1=0$$

特征根为 $\lambda=1$(二重)，故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2xe^x.$$

下面利用常数变易法求已知方程形如

$$y_1=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x.$$

的一个特解. 可得到 $C_1'(x)$，$C_2'(x)$满足的代数方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = \dfrac{e^x}{x} \end{cases}$$

解之,得

$$C_1'(x) = -1, \quad C_1(x) = -x$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{x}, \quad C_2(x) = \ln|x|$$

故所求通解为

$$y = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + xe^x\ln|x|$$

化简得

$$y = e^x(C_3x + C_1 + x\ln|x|)$$

其中 $C_3 = C_2 - 1$.

【297】 $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

解 已知方程对应的齐次方程的通解为

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

现在利用常数变易法求已知方程形如

$$y_1 = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$$

的一个特解. 可得到 $C_1'(x), C_2'(x)$满足下列方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{e^x + 1} \end{cases}$$

解之,得

$$C_1'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad C_1(x) = \ln(e^x + 1)$$

$$C_2'(x) = \frac{-e^{2x}}{e^x + 1}, \quad C_2(x) = -e^x + \ln(e^x + 1)$$

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\ln(e^x+1)+[-e^x+\ln(e^x+1)]e^{-2x}$$

整理得

$$y=C_3e^{-x}+C_2e^{-2x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)$$

其中 $C_3=C_1-1$.

【298】 $\ddot{x}+x=\dfrac{1}{\sin^3 t}$.

解　已知方程对应的齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t$$

现在用常数变易法求已知方程形如

$$x_1=C_1(t)\cos t+C_2(t)\sin t$$

的一个特解. 可得 $C_1'(t),C_2'(t)$满足的代数方程组

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t+C_2'(t)\sin t=0 \\ -C_1'(t)\sin t+C_2'(t)\cos t=\dfrac{1}{\sin^3 t} \end{cases}$$

解之，得

$$C_1'(t)=-\frac{1}{\sin^2 t},\quad C_1(t)=\cot t$$

$$C_2'(t)=\frac{\cos t}{\sin^3 t},\quad C_2(t)=-\frac{1}{2\sin^2 t}$$

故所求通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+\cot t\cos t-\frac{1}{2\sin t}.$$

【299】 $\ddot{x}+x=1-\dfrac{1}{\sin t}$.

解　已知方程对应的齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t$$

现在利用常数变易法求已知方程形如

$$x_1 = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$$

的一个特解. 可得到 $C_1'(t)$, $C_2'(t)$满足的代数方程组

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0 \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = 1 - \dfrac{1}{\sin t} \end{cases}$$

解之, 得

$$C_1'(t) = 1 - \sin t, \qquad C_1(t) = t + \cos t$$

$$C_2'(t) = \cos t - \cot t, \quad C_2(t) = \sin t - \ln|\sin t|$$

故所求通解为

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + (t + \cos t)\cos t + (\sin t - \ln|\sin t|)\sin t$$

化简得

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + 1 + t\cos t - \sin t\ln|\sin t|.$$

【300】 $y''' + 4y' = 4\cot 2x$.

解 已知方程对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0$$

特征根为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$, 故齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$$

下面用常数变易法求已知方程形如

$$y_1 = C_1(x) + C_2(x)\cos 2x + C_3(x)\sin 2x$$

的一个特解. 得到方程组

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos 2x + C_3'(x)\sin 2x = 0 & (1) \\ -2C_2'(x)\sin 2x + 2C_3'(x)\cos 2x = 0 & (2) \\ -4C_2'(x)\cos 2x - 4C_3'(x)\sin 2x = 4\cot 2x & (3) \end{cases}$$

求解关于 $C_1'(x), C_2'(x), C_3'(x)$的代数方程组(1),(2),(3)得

$$C_1'(x) = \cot 2x, \quad C_1(x) = \frac{1}{2}\ln|\sin 2x|$$

$$C_2'(x) = -\cos^2 2x\csc 2x,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\ln|\csc 2x - \cot 2x| - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$C_3'(x) = -\cos 2x, \quad C_3(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x$$

故所求通解为

$$y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + \frac{1}{2}\ln|\sin 2x|$$
$$-\frac{1}{2}\cos 2x\ln|\csc 2x - \cot 2x| - \frac{1}{2}$$

或写为

$$y = C_4 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + \frac{1}{2}\ln|\sin 2x|$$
$$-\frac{1}{2}\cos 2x\ln|\csc 2x - \cot 2x|$$

其中 $C_4 = C_1 - \frac{1}{2}$.

【301】 $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$,其中 $f(t)$在$(-\infty, +\infty)$上连续.

解　已知方程对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

求出特征根 $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$, 该齐次方程的通解为

$$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

由常数变易法, 非齐次方程有下列形式的特解

$$x^*(t) = C_1(t)\cos\omega t + C_2(t)\sin\omega t \tag{1}$$

其中 $C_1'(t), C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos\omega t + C_2'(t)\sin\omega t = 0 \\ -C_1'(t)\omega\sin\omega t + C_2'(t)\omega\cos\omega t = f(t) \end{cases}$$

解之, 得

$$C_1'(t)=\frac{-1}{\omega}f(t)\sin\omega t,\quad C_1(t)=\frac{-1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau$$

$$C_2'(t)=\frac{1}{\omega}f(t)\cos\omega t,\quad C_2(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau$$

代入(1)，可得原方程的通解

$$x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

【302】 试验证$\ddot{x}-x=0$的基本解组为e^t,e^{-t}，并求方程$\ddot{x}-x=\cos t$的通解.

证 e^t,e^{-t}显然是已知齐次方程的解. 并且

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix}=-2\neq 0$$

所以，e^t,e^{-t}是已知齐次方程的基本解组.

现在利用常数变易法求非齐次方程形如

$$x_1=C_1(t)e^t+C_2(t)e^{-t}$$

的一个特解. 可得到$C_1'(t),C_2'(t)$满足的方程组

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t+C_2'(t)e^{-t}=0 \\ C_1'(t)e^t-C_2'(t)e^{-t}=\cos(t) \end{cases}$$

解之，得

$$C_1'(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\cos t,\quad C_1(t)=\frac{1}{4}e^{-t}(-\cos t+\sin t)$$

$$C_2'(t)=-\frac{1}{2}e^t\cos t,\quad C_2(t)=-\frac{1}{4}e^t(\cos t+\sin t)$$

故所求非齐次方程的通解为

$$x=C_1e^t+C_2e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-t}(-\cos t+\sin t)e^t$$

$$-\frac{1}{4}e^t(\cos t+\sin t)e^{-t}$$

化简得

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

【303】 试验证 $\ddot{x} + \frac{t}{1-t}\dot{x} - \frac{1}{1-t}x = 0$ 有基本解组 t, e^t，并求方程 $\ddot{x} + \frac{t}{1-t}\dot{x} - \frac{1}{1-t}x = t-1$ 的通解.

证 对任意不含 $t=1$ 的区间 I 易知 t, e^t 是已知齐次方程在该区间上的解，并且

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix} = e^t(t-1)$$

存在 $t_0 = 2$，$W(t_0) = e^2 \neq 0$，所以，t, e^t 在区间 I 上构成已知齐次方程的一个基本解组.

现在利用常数变易法求非齐次方程形如

$$x_1 = C_1(t)t + C_2(t)e^t$$

的一个特解. 可得 $C_1'(t)t, C_2'(t)$满足的代数方程组

$$\begin{cases} C_1'(t)t + C_2'(t)e^t = 0 \\ C_1'(t) + C_2'(t)e^t = t-1 \end{cases}$$

得

$$C_1'(t) = -1, \quad C_1(t) = -t$$

$$C_2'(t) = te^{-t}, \quad C_2(t) = -(t+1)e^{-t}$$

故所求非齐次方程的通解为

$$x = C_1 t + C_2 e^t - t^2 - t - 1.$$

【304】 求方程 $\ddot{x} + 4x = t\sin 2t$ 的通解，已知它对应的齐次线性方程有基本解组 $\cos 2t, \sin 2t$.

解 利用常数变易法求已知方程形如

$$x_1=C_1(t)\cos2t+C_2(t)\sin2t$$

的一个特解，可得到 $C_1'(t),C_2'(t)$满足的代数方程组

$$\begin{cases}C_1'(t)\cos2t+C_2'(t)\sin2t=0\\ -2C_1'(t)\sin2t+2C_2'(t)\cos2t=t\sin2t\end{cases}$$

解之，得

$$C_1'(t)=-\frac{1}{2}t\sin^22t,\quad C_1(t)=-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{64}\cos4t+\frac{1}{16}t\sin4t$$

$$C_2'(t)=\frac{1}{4}t\sin4t,\qquad C_2(t)=\frac{1}{64}\sin4t-\frac{1}{16}t\cos4t$$

故所求非齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos2t+C_2\sin2t-\frac{1}{8}t^2\cos2t+\frac{1}{16}t\sin2t+\frac{1}{64}\cos2t.$$

【305】 在方程 $y''+3y'+2y=f(x)$中，$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 试证明：已知方程的任一解 $y(x)$，均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

证 已知方程对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$$

现在利用常数变易法求已知方程形如

$$y_1=C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)e^{-x}$$

的一个特解. 得到 $C_1'(x)$，$C_2'(x)$所满足的方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)e^{-2x}+C_2'(x)e^{-x}=0\\ -2C_1'(x)e^{-2x}-C_2'(x)e^{-x}=f(x)\end{cases}$$

解得

$$C_1'(x)=-e^{2x}f(x),\quad C_1(x)=-\int_0^x e^{2t}f(t)\mathrm{d}t$$

$$C_2'(x)=e^xf(x),\qquad C_2(x)=\int_0^x e^tf(t)\mathrm{d}t$$

故已知方程的通解为

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)\mathrm{d}t + e^{-x}\int_0^x e^tf(t)\mathrm{d}t \quad (1)$$

由洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^tf(t)\mathrm{d}t}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}f(x) = 0$$

同理可证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{2t}f(t)\mathrm{d}t}{e^{2x}} = 0$$

由(1)式即得

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$$

即证明了已知方程的任一解 $y(x)$，当 $x\to+\infty$时，均有 $y(x)$ 趋向于零.

【306】 用待定系数求解下列非齐次线性方程：

1) $y''+4y=8$;

2) $s''-a^2s=t+1$;

3) $\ddot{x}+6\dot{x}+5x=e^{2t}$;

4) $y''+y=xe^{-x}$;

5) $2y''+3y'+y=4-e^x$;

6) $y''-2y'+4y=(x+2)e^{3x}$;

7) $\ddot{x}+6\dot{x}+13x=e^t(t^2-5t+2)$.

解 1) 已知方程对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+4=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm2i$，所以通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

由于 0 不是特征根，故已知非齐次方程有形如

$$y_1 = A \tag{1}$$

的特解．将(1)代入已知方程，比较系数得

$$A = 2$$

即

$$y_1 = 2$$

因而，所求通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2.$$

2）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - a^2 = 0$$

特征根为 $\lambda_1 = a$，$\lambda_2 = -a$．

ⅰ）若 $a \neq 0$，此时齐次方程的通解为

$$s = C_1e^{at} + C_2e^{-at}$$

由于 0 不是特征根，故已知非齐次方程有形如

$$s_1 = At + B \tag{2}$$

的特解．将(2)代入已知方程，比较系数得

$$A = -\frac{1}{a^2},\quad B = -\frac{1}{a^2}$$

所以

$$s_1 = -\frac{1}{a^2}(t+1)$$

因而，$a \neq 0$ 时，通解为

$$s = C_1e^{t} + C_2e^{-t} - \frac{1}{a^2}(t+1).$$

ⅱ）若 $a = 0$，此时齐次方程的通解为

$$s=C_1+C_2t$$

已知非齐次方程写为

$$s''=t+1 \tag{3}$$

积分两次即得

$$s_2=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2$$

是(3)的一个特解．所以，$a=0$ 时，所求通解为

$$s=C_1+C_2t+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2.$$

3）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+6\lambda+5=0$$

特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-5$，齐次方程的通解为

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-5t}$$

由于 2 不是特征根，故已知方程有形如

$$x_1=Ae^{2t} \tag{4}$$

的特解．将(4)代入已知方程，比较系数得

$$A=\frac{1}{21}$$

即

$$x_1=\frac{1}{21}e^{2t}$$

所以所求通解为

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-5t}+\frac{1}{21}e^{2t}.$$

4）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+1=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

由于 -1 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=(Ax+B)e^{-x} \tag{5}$$

的特解. 将(5)代入已知方程，比较系数得

$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{2}$$

即

$$y_1=\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$$

因此，已知方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}.$$

5）对应齐次方程的特征方程为

$$2\lambda^2+3\lambda+1=0$$

特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}$，齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}$$

由于 0,1 都不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=A+Be^x \tag{6}$$

的特解. 将(6)代入已知方程，得

$$A=4,\quad B=-\frac{1}{6}$$

即

$$y_1=4-\frac{1}{6}e^x$$

因而，所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}+4-\frac{1}{6}e^x.$$

6）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+4=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i$，齐次方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$$

由于 3 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=e^{3x}(Ax+B) \tag{7}$$

的特解. 将(7)代入已知方程，得

$$A=\frac{1}{7},\quad B=\frac{10}{49}$$

即

$$y_1=e^{3x}(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49})$$

因而，所求通解为

$$y=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)+e^{3x}(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}).$$

7）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+6\lambda+13=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=-3\pm2i$，齐次方程的通解为

$$x=e^{-3t}(C_1\cos2t+C_2\sin2t)$$

由于 1 不是特征根，故已知方程有形如

$$x_1=(At^2+Bt+C)e^t \tag{8}$$

的特解. 求出

$$\dot{x}_1=[At^2+(2A+B)t+(B+C)]e^t \tag{9}$$

$$\ddot{x}_1=[At^2+(4A+B)t+(2A+2B+C)]e^t \tag{10}$$

将(8)、(9)、(10)代入已知方程，比较系数得

$$A=\frac{1}{20},\quad B=-\frac{29}{100},\quad C=\frac{211}{1000}$$

因此

$$x_1=\left(\frac{1}{20}t^2-\frac{29}{100}t+\frac{211}{1000}\right)e^t$$

所以，所求通解为

$$x=e^{-3t}(C_1\cos2t+C_2\sin2t)+e^t\left(\frac{1}{20}t^2-\frac{29}{100}t+\frac{211}{1000}\right).$$

【307】 求下列非齐次方程的通解：

1) $\dddot{x}-x=e^t$;

2) $s''+2as'+a^2s=e^t$;

3) $\ddot{x}-4\dot{x}+4x=e^t+e^{2t}+1$;

4) $y''+4y'+1=0$;

5) $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$.

解 1) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3-1=0$$

特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，故通解为

$$x=C_1e^t+\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$$

由于 1 是一重特征根，所以已知非齐次方程有形如

$$x_1=Ate^t \tag{1}$$

的特解. 将(1)代入已知方程，得

$$A=\frac{1}{3}$$

即

$$x_1=\frac{1}{3}te^t$$

因而，所求通解为

$$x = C_1 e^t + \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{3} t e^t$$

2）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 = 0$$

特征根为 $\lambda_{1,2} = -a$（二重）.

ⅰ）若 $a \neq -1$，此时齐次方程的通解为

$$s = (C_1 + C_2 t) e^{-at}$$

由于 1 不是特征根，故已知方程有形如

$$s_1 = A e^t \tag{2}$$

的特解. 将(2)代入已知方程，得

$$A = \frac{1}{(a+1)^2}$$

即

$$s_1 = \frac{1}{(a+1)^2} e^t$$

所以，$a \neq -1$ 时已知方程的通解为

$$s = (C_1 + C_2 t) e^{-at} + \frac{1}{(a+1)^2} e^t .$$

ⅱ）若 $a = -1$，此时齐次方程的通解为

$$s = (C_1 + C_2 t) e^t$$

由于 1 是二重特征根，故已知非齐次方程有形如

$$s_2 = A t^2 e^t \tag{3}$$

的特解. 将(3)代入已知方程，得

$$A = \frac{1}{2}$$

即

$$s_2=\frac{1}{2}t^2e^t$$

所以，$a=-1$ 时原方程的通解为

$$s=(C_1+C_2t+\frac{1}{2}t^2)e^t.$$

3）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

特征根为 $\lambda=2$(二重),故齐次方程的通解为

$$x=(C_1+C_2t)e^{2t}$$

由于 2 是二重特征根，1 和 0 不是特征根，故已知非齐次方程有形如

$$x_1=A+Be^t+Ct^2e^{2t} \tag{4}$$

的特解. 将(4)代入已知方程，得

$$A=\frac{1}{4},\quad B=1,\quad C=\frac{1}{2}$$

即

$$x_1=\frac{1}{4}+e^t+\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

所以，所求通解为

$$x=(C_1+C_2t)e^{2t}+\frac{1}{4}+e^t+\frac{1}{2}t^2e^{2t}.$$

4）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda=0$$

特征根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-4$，齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-4x}$$

因为 0 是一重特征根，故已知非齐次方程有形如

$$y_1=Ax \tag{5}$$

的特解．将(5)代入已知方程，得

$$A=-\frac{1}{4}$$

所以，所求通解为

$$y=C_1+C_2e^{-4x}-\frac{1}{4}x.$$

5）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$$

特征根为 $\lambda=-1$(三重)，故通解为

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}$$

因为 -1 是三重特征根，故已知非齐次方程有形如

$$y_1=x^3(A+Bx)e^{-x} \tag{6}$$

的特解．将(6)代入已知方程，得

$$A=-\frac{5}{6},\quad B=\frac{1}{24}$$

即

$$y_1=x^3(-\frac{5}{6}+\frac{1}{24}x)e^{-x}$$

所以，所求通解为

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}+\frac{1}{24}x^3(x-20)e^{-x}.$$

【308】 求下列非齐次方程的通解：

1）$y''+3y'=2\sin x+\cos x$；

2）$\ddot{x}+2k\dot{x}+2k^2x=5k^2\sin kt\quad(k\neq0)$；

3）$y''+y=\sin x\cos x$；

4）$y''-2y'+2y=e^{-x}\cos x$；

5）$y''-2y'+10y=x\cos 2x$．

解 1）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda=0$$

特征根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-3$，所以对应齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-3x}$$

由于 $\pm i$ 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=A\cos x+B\sin x \tag{1}$$

的特解. 将(1)代入已知方程，得

$$A=-\frac{7}{10},\quad B=\frac{1}{10}$$

因而,所求通解为

$$y=C_1+C_2e^{-3x}-\frac{7}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x.$$

2）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+2k\lambda+2k^2=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=-k\pm ki$，齐次方程的通解为

$$x=e^{-kt}(C_1\cos kt+C_2\sin kt)$$

由于 $\pm ki$ 不是特征根，故已知方程有形如

$$x_1=A\cos kt+B\sin kt \tag{2}$$

的特解. 将(2)代入已知方程，得

$$A=-2,\quad B=1$$

因而，所求通解为

$$x=e^{-kt}(C_1\cos kt+C_2\sin kt)-2\cos kt+\sin kt.$$

3）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+1=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

因为

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

而 $\pm 2i$ 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=A\cos 2x+B\sin 2x \tag{3}$$

的特解. 将(3)代入已知方程，得

$$A=0,\quad B=-\frac{1}{6}$$

因而，所求通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{6}\sin 2x.$$

4) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$，齐次方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

由于 $-1\pm i$ 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=e^{-x}(A\cos x+B\sin x) \tag{4}$$

的特解. 将(4)代入已知方程，得

$$A=\frac{1}{8},\quad B=-\frac{1}{8}$$

因而，所求通解为

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{8}e^{-x}(\cos x-\sin x).$$

5) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+10=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm 3i$，齐次方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$$

由于$\pm 2i$不是特征根，故已知非齐次方程有形如

$$y_1=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x \tag{5}$$

的特解. 将(5)代入已知方程，得

$$A=\frac{3}{26},\quad B=\frac{29}{338},\quad C=-\frac{1}{13},\quad D=-\frac{1}{169}$$

因而,所求通解为

$$y=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+(\frac{3}{26}x+\frac{29}{338})\cos 2x$$
$$-(\frac{1}{13}x+\frac{1}{169})\sin 2x.$$

【309】 求下列非齐次方程的通解:

1) $\ddot{x}+x=\sin at,\ a>0$;

2) $2y''+5y'=\cos^2 x$;

3) $y''+4y=x\sin 2x$;

4) $y''+2y'=3+4\sin 2x$;

5) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$;

6) $y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$;

7) $\ddot{x}+x=\sin t-\cos 2t$;

8) $\ddot{x}-2\dot{x}+2x=te^t\cos t$.

解 1) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+1=0$$

特征根为$\lambda_{1,2}=\pm i$，所以对应齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t$$

ⅰ) 若$a=1$,因为$\pm i$是一重特征根，故已知方程有形如

$$x_1=t(A\cos t+B\sin t) \tag{1}$$

的特解. 将(1)代入已知方程，得

$$A=-\frac{1}{2},\quad B=0$$

所以，$a=1$ 时所求通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t.$$

ii）若 $a\neq1$，此时已知方程有形如

$$x_2=C\cos at+D\sin at \tag{2}$$

的特解．将(2)代入已知方程，得

$$C=0,\quad D=\frac{1}{1-a^2}$$

所以，$a\neq1$ 时所求通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{1}{1-a^2}\sin at.$$

2）对应齐次方程的特征方程为

$$2\lambda^2+5\lambda=0$$

特征根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-\frac{5}{2}$，齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}$$

因为

$$\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$$

而 0 是一重特征根，$\pm2i$ 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=Ax+B\cos2x+C\sin2x \tag{3}$$

的特解．将(3)代入已知方程，得

$$A=\frac{1}{10},\quad B=-\frac{1}{41},\quad C=\frac{5}{164}$$

因而，所求通解为

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{10}x-\frac{1}{41}\cos2x+\frac{5}{164}\sin2x.$$

3）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+4=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm2i$，齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$$

因为 $\pm2i$ 是一重特征根，故已知方程有形如

$$y_1=(Ax^2+Bx)\cos2x+(Cx^2+Dx)\sin2x \tag{4}$$

的特解. 将(4)代入已知方程，得

$$A=-\frac{1}{8},\quad B=0,\quad C=0,\quad D=\frac{1}{16}$$

所以，所求通解为

$$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x-\frac{1}{8}x^2\cos2x+\frac{1}{16}x\sin2x.$$

4）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda=0$$

特征根为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=0$，齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2$$

由于 0 是一重特征根，$\pm2i$ 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=Ax+B\cos2x+C\sin2x \tag{5}$$

的特解. 将(5)代入已知方程，得

$$A=\frac{3}{2},\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2}$$

所以，所求通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}(\cos2x+\sin2x).$$

5）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$，齐次方程的通解为

$$y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x$$

由于 $1\pm i$ 是一重特征根，故已知方程有形如

$$y_1=xe^x(A\cos x+B\sin x) \tag{6}$$

的特解. 将(6)代入已知方程，得

$$A=0,\quad B=2$$

所以，所求通解为

$$y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x+2xe^x\sin x.$$

6）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+9=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm 3i$，齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$$

因为 $\pm 3i$ 是一重特征根，故已知方程有形如

$$y_1=x(A\cos 3x+B\sin 3x) \tag{7}$$

的特解. 将(7)代入已知方程，得

$$A=5,\quad B=3$$

所以，所求通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+5x\cos 3x+3x\sin 3x.$$

7）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+1=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t$$

因为 $\pm i$ 是一重特征根，而 $\pm 2i$ 不是特征根，故已知方程有形如

$$x_1 = t(A\cos t + B\sin t) + C\cos 2t + D\sin 2t \tag{8}$$

的特解. 将(8)代入已知方程，得

$$A = -\frac{1}{2},\quad B = 0,\quad C = \frac{1}{3},\quad D = 0$$

所以，所求通解为

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{3}\cos 2t.$$

8) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

特征根为 $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$，齐次方程的通解为

$$x = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t)$$

因为 $1 \pm i$ 是一重特征根，故已知方程有形如

$$x_1 = (At^2 + Bt + C)e^t\cos t + (Dt^2 + Et + F)e^t\sin t \tag{9}$$

的特解. 将(9)代入已知方程，得

$$A = 0,\quad B = \frac{1}{4},\quad C = 0,\quad D = \frac{1}{4},\quad E = 0,\quad F = 0$$

所以，所求通解为

$$x = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t) + \frac{1}{4}te^t(\cos t + t\sin t).$$

【310】 求下列初值问题的解：

1) $y'' + y = a$（a 是常数）；$y(0) = 0$，$y'(0) = 0$；

2) $y'' + y' - 2y = 2x$；$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$；

3) $\ddot{x} + x = \cos 2t$；$x(0) = \dot{x}(0) = -2$；

4) $y'' - 4y = e^{2x}$；$y(0) = 1$，$y'(0) = 2$；

5) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$；$y(0) = 1, y'(0) = -2$；$y''(0) = 3$，
$y'''(0) = 0$；

6) $y^{(4)}+y=2e^{x}$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=1$.

解 1) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+1=0$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

由于 0 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=A \tag{1}$$

的特解. 将(1)代入方程，得

$$A=a$$

所以，已知方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+a$$

将 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ 代入上式，得

$$C_1=-a,\quad C_2=0$$

因而，所求特解为

$$y=a(1-\cos x).$$

2) 对应齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$$

由于 0 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1=Ax+B \tag{2}$$

的特解. 将(2)代入方程，得

$$A=-1,\quad B=-\frac{1}{2}$$

所以，非齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}-x-\frac{1}{2}$$

将 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 代入上式，得

$$C_1=1,\quad C_2=-1$$

因而，所求特解为

$$y=e^x-\frac{1}{2}e^{-2x}-x-\frac{1}{2}.$$

3）对应齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t$$

由于 $\pm 2i$ 不是特征根，故已知方程有形如

$$x_1=A\cos 2t+B\sin 2t \tag{3}$$

的特解. 将(3)代入已知方程，得

$$A=-\frac{1}{3},\quad B=0$$

所以，非齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t$$

将 $x(0)=\dot{x}(0)=-2$ 代入上式，得

$$C_1=-\frac{5}{3},\quad C_2=-2$$

因而，所求特解为

$$x=-\frac{5}{3}\cos t-2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t.$$

4）对应齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$$

因为 2 是特征方程的单根，故已知方程有形如

$$y_1=Axe^{2x} \tag{4}$$

的特解. 将(4)代入方程，得

$$A=\frac{1}{4}$$

所以，非齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$$

将 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 代入上式，得

$$C_1=\frac{15}{16},\quad C_2=\frac{1}{16}$$

所以，所求特解为

$$y=\frac{15}{16}e^{2x}+\frac{1}{16}e^{-2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}.$$

5）对应齐次方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$$

因为 $\pm i$ 是二重特征根，故已知方程有形如

$$y_1=Ax^2\cos x+Bx^2\sin x \tag{5}$$

的特解. 将(5)代入已知方程，得

$$A=0,\quad B=-\frac{1}{8}$$

因而，非齐次方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x-\frac{1}{8}x^2\sin x$$

将初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=-2$，$y''(0)=3$，$y'''(0)=0$，代入上式，得

$$C_1=1,\quad C_2=\frac{5}{8},\quad C_3=-\frac{21}{8},\quad C_4=2$$

所以，所求特解为

$$x=(1+\frac{5}{8}x)\cos x-(\frac{21}{8}-2x+\frac{1}{8}x^2)\sin x.$$

6）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^4+1=0$$

因为 1 不是特征根，故已知方程有形如

$$y_1 = Ae^x \tag{6}$$

的特解. 将(6)代入已知方程，得

$$A=1$$

即，e^x 是已知方程的特解. 注意到 e^x 的各阶导数均为e^x，且 $e^0=1$，所以，所求特解为

$$y=e^x.$$

【311】 用拉普拉斯变换法求解下列初值问题：

1) $y''+3-y'+2y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

2) $y''-2y'+2y=e^{-t}$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

3) $\ddot{x}+a^2x=b\sin at$; $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=x_0$;

4) $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=e^{3t}$; $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$;

5) $\ddot{x}-2\dot{x}+x=te^t$; $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$.

解 1) 方程可写为

$$y''-y'+2y=-3$$

设 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$，方程两端同时进行拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)-s-sY(s)+1+2Y(s)=-\frac{3}{s}$$

整理得

$$Y(s)=\frac{s^2-s-3}{s(s^2-s+2)}$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{s-\frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}-\frac{5}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s}$$

再求逆变换 $L^{-1}[Y(s)]$，即得原初值问题的解

$$y(t)=e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{5}{2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5}{2\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)-\frac{3}{2}$$

2）方程两端同时进行拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)-1-2sY(s)+2Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

整理得

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{s+2}{(s+1)(s^2-2s+2)}\\&=\frac{1}{5}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{5}\frac{s-1}{(s-1)^2+1}+\frac{7}{5}\frac{1}{(s-1)^2+1}\end{aligned}$$

再求逆变换 $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$，得原初值问题的解

$$y(t)=\frac{1}{5}e^{-t}+e^{t}\left(-\frac{1}{5}\cos t+\frac{7}{5}\sin t\right)$$

3）设 $\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$，方程两端同时进行拉普拉斯变换，得

$$s^2X(s)-sx_0-x_0+a^2X(s)=\frac{ab}{s^2+a^2}$$

整理得

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}+\frac{(s+1)x_0}{s^2+a^2}\\&=\frac{b}{2a^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}-\frac{b}{2a}\cdot\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+\frac{x_0}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\end{aligned}$$

再求逆变换 $\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$，得原初值问题的解

$$x(t)=\frac{b}{2a^2}\sin at-\frac{b}{2a}t\cos at+x_0\cos at+\frac{x_0}{a}\sin at$$

整理得

$$x(t)=\frac{1}{2a^2}[(b+2ax_0)\sin at+(2a^2x_0-abt)\cos at]$$

4)方程两端同时进行拉普拉斯变换，得

$$s^2X(s)-s-3sX(s)+3+2X(s)=\frac{1}{s-3}$$

整理得

$$X(s)=\frac{s^2-6s+10}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$
$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s-1}-2\cdot\frac{1}{s-2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3}$$

再求逆变换 $\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$，得原初值问题的解

$$x(t)=\frac{5}{2}e^t-2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}$$

5) 方程两端同时进行拉普拉斯变换，得

$$s^2X(s)-2sX(s)+X(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$$

即

$$X(s)=\frac{1}{(s-1)^4}$$

由于

$$\mathcal{L}[t^ne^{at}]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\mathcal{L}[\frac{t^n}{n!}e^{at}]=\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$$

故

$$\mathcal{L}[\frac{t^3}{3!}e^t]=\frac{1}{(s-1)^4}$$

因而得原初值问题的解

$$x(t)=\frac{1}{6}t^3e^t.$$

【312】 用算子法求解下列非齐次方程:

1) $(D^2-6D+10)y=e^{3x}$;

2) $(D^2-4D+4)y=x^2$;

3) $(D^2+1)y=\sin 2x-\cos 2x$;

4) $(D^2+4)y=x\sin 2x$;

5) $(D^2+2D+1)y=\mathrm{sh}x$;

6) $(D^2-2D+2)y=xe^x\cos x$;

7) $(D^3+D^2+D+1)y=xe^x$;

8) $(D^3-3D^2+4D-2)y=e^x+\cos x$.

解 1) $P(D)=D^2-6D+10$, 对应齐次方程的通解为

$$y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

用运算公式(a)得原方程的特解

$$y^*=\frac{1}{P(D)}e^{3x}=\frac{1}{D^2-6D+10}e^{3x}=\frac{1}{3^2-6\times 3+10}e^{3x}=e^{3x}$$

因此, 所求通解为

$$y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x+1)$$

2) $P(D)=D^2-4D+4=(D-2)^2$, 对应齐次方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$$

原方程的特解

$$y^*=\frac{1}{P(D)}x^2=\frac{1}{(D-2)^2}x^2=\frac{1}{4}(1+D+\frac{3}{4}D^2)x^2$$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$$

其中$\frac{1}{4}(1+D+\frac{3}{4}D^2)$是以 $4-4D+D^2$ 去除 1,在第 3 步上得到的商式. 因此, 所求通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$$

3) $P(D^2)=D^2+1$, 对应齐次方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

由运算公式(b)，(c)得原方程的特解

$$y^* = \frac{1}{P(D^2)}(\sin 2x - \cos 2x) = \frac{1}{-2^2+1}\sin 2x - \frac{1}{-2^2+1}\cos 2x$$

$$= -\frac{1}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos 2x$$

因此，原方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos 2x$$

4) $P(D^2) = D^2 + 4$，对应齐次方程的通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

原方程的特解

$$y^* = \frac{1}{D^2+4}x\sin 2x$$

由于 $P(-2^2)=0$，此时不能运用运算公式(b)，改为计算

$$\frac{1}{D^2+4}x(\cos 2x + i\sin 2x) = \frac{1}{D^2+4}xe^{2xi}$$

的虚部，由运算公式(d)，

$$上式 = e^{2xi}\frac{1}{(D+2i)^2+4}x = e^{2xi}\frac{1}{D^2+4iD}x$$

$$= \frac{1}{4i}e^{2xi}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{1+\frac{D}{4i}}x = \frac{1}{4i}e^{2xi}\frac{1}{D}\left(1-\frac{D}{4i}\right)x$$

$$= \frac{1}{4i}e^{2xi}\frac{1}{D}\left(x - \frac{1}{4i}\right) = \frac{1}{4i}e^{2xi}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4i}\right)$$

$$= -\frac{i}{4}e^{2xi}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{ix}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{16}(\cos 2x + i\sin 2x)(x - 2ix^2)$$

取其虚部，有

$$y^* = -\frac{1}{8}x^2\cos 2x + \frac{1}{16}x\sin 2x$$

因此，通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{8}x^2\cos 2x + \frac{1}{16}x\sin 2x$$

5）$P(D) = D^2 + 2D + 1 = (D+1)^2$，对应齐次方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$$

原方程的特解

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{1}{P(D)}\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(D+1)^2}e^x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(D+1)^2}e^{-x} \\ &= \frac{1}{2}e^x\frac{1}{(D+2)^2}\cdot 1 - \frac{1}{2}e^{-x}\frac{1}{D^2}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{8}e^x\left(1 - D + \frac{3}{4}D^2\right)\cdot 1 - \frac{1}{2}e^{-x}\cdot\frac{x^2}{2} \\ &= \frac{1}{8}e^x - \frac{1}{4}x^2e^{-x} \end{aligned}$$

所以，所求通解为

$$y = \left(C_1 + C_2x - \frac{1}{4}x^2\right)e^{-x} + \frac{1}{8}e^x$$

6）$P(D) = D^2 - 2D + 2$，对应齐次方程的通解为

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

原方程的特解为

$$y^* = \frac{1}{P(D)}xe^x\cos x$$

它是

$$\frac{1}{D^2 - 2D + 2}xe^x(\cos x + i\sin x) = \frac{1}{D^2 - 2D + 2}xe^{(i+1)x}$$

的实部. 由运算公式(d)

$$\text{上式}=e^{(i+1)x}\frac{1}{(D+i+1)^2-2(D+i+1)+2}x$$

$$=e^{(i+1)x}\frac{1}{D(D+2i)}x$$

$$=\frac{1}{2i}e^{(i+1)x}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{1+\frac{D}{2i}}x=\frac{1}{2i}e^{(i+1)x}\frac{1}{D}(1-\frac{D}{2i})x$$

$$=\frac{1}{2i}e^{(i+1)x}\frac{1}{D}(x-\frac{1}{2i})=\frac{1}{2i}e^{(i+1)x}(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2i})$$

$$=\frac{1}{4}e^{(i+1)x}(x-ix^2)$$

$$=\frac{1}{4}(\cos x+i\sin x)(x-ix^2)e^x$$

取其实部，得

$$y^*=(\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x)e^x$$

所以，通解为

$$y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x+\frac{1}{4}xe^x(\cos x+x\sin x)$$

7) $P(D)=D^3+D^2+D+1=(D+1)(D^2+1)$，对应齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x$$

原方程的特解

$$y^*=\frac{1}{P(D)}xe^x=\frac{1}{(D+1)(D^2+1)}xe^x$$

$$=e^x\frac{1}{(D+1+1)[(D+1)^2+1]}x$$

$$=e^x\frac{1}{D+2}\cdot\frac{1}{D^2+2D+2}x$$

$$=e^x\frac{1}{D+2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}D+\frac{1}{4}D^2)x$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}\frac{1}{D+2}(x-1)=\frac{1}{4}e^{x}\frac{1}{1+\frac{D}{2}}(x-1)$$

$$=\frac{1}{4}e^{x}(1-\frac{D}{2})(x-1)=\frac{1}{4}xe^{x}-\frac{3}{8}e^{x}$$

所以，通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+(\frac{1}{4}x-\frac{3}{8})e^{x}$$

8) $P(D)=D^3-3D^2+4D-2=(D-1)(D^2-2D+2)$，对应齐次方程的通解为

$$y=(C_1+C_2\cos x+C_3\sin x)e^{x}$$

原方程的特解为

$$y^*=\frac{1}{P(D)}(e^{x}+\cos x)=\frac{1}{(D-1)(D^2-2D+2)}e^{x}$$

$$+\frac{1}{(D-1)(D^2-2D+2)}\cos x$$

记

$$y_1^*=\frac{1}{(D-1)(D^2-2D+2)}e^{x},$$

$$y_2^*=\frac{1}{(D-1)(D^2-2D+2)}\cos x$$

则

$$y_1^*=\frac{1}{D-1}e^{x}\frac{1}{1^2-2\times1+2}=\frac{1}{D-1}e^{x}=e^{x}\frac{1}{D}1=xe^{x}$$

y_2^* 是

$$\frac{1}{P(D)}(\cos x+i\sin x)=\frac{1}{P(D)}e^{ix}=\frac{1}{(D-1)(D^2-2D+2)}e^{ix}$$

的实部

$$上式=e^{ix}\frac{1}{i-1}\cdot\frac{1}{(i^2-2i+2)}=\frac{1}{1+3i}e^{ix}$$

取其实部，得

$$y_2^* = \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x$$

所以

$$y^* = y_1^* + y_2^* = xe^x + \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x$$

因此，所求通解为

$$y = (C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x)e^x + xe^x + \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x.$$

【313】 设二阶常系数线性微分方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$ 的一个特解为 $y = e^{2x} + (1 + x)e^x$，试确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

解 将 $y = e^{2x} + (1 + x)e^x$ 代入已知方程，比较等式两端 e^{2x}, xe^x, e^x 的系数，得到方程组

$$\begin{cases} 4 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 3 + 2\alpha + \beta = \gamma \\ \alpha + \beta + 1 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\alpha = -3,\quad \beta = 2,\quad \gamma = -1$$

因此，已知方程为

$$y'' - 3y' + 2y = -e^x$$

它对应的齐次方程的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

故已知方程的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{2x} + (1 + x)e^x$$

或

$$y = C_3e^x + C_4e^{2x} + xe^x$$

其中 $C_3=C_1+1$，$C_4=C_2+1$.

【314】 设 $f(x)$为连续函数，且满足

$$f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

求 $f(x)$.

解 这是一个含未知函数的积分方程，将它转化为微分方程求解.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x-\left(\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t\right)'+\left(\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)' \\ &= \cos x-xf(x)+\left(xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$f''(x)=-\sin x-f(x)$$

即

$$f''(x)+f(x)=-\sin x \qquad (1)$$

并且，由已知方程知

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1 \qquad (2)$$

解(1)得

$$f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x$$

再将初始条件(2)代入上式，得

$$C_1=\frac{1}{2},\quad C_2=0$$

故

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x.$$

【315】 设 $f(x)$是连续函数，且满足

$$f(x) = e^x + \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

求 $f(x)$.

解 解题思路同上题. 将已知方程转化为微分方程

$$f''(x) - f(x) = e^x \qquad (1)$$

并且满足初始条件

$$f(0)=1, \quad f'(0)=1 \qquad (2)$$

解问题(1)、(2), 得到

$$f(x)=\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x+\frac{1}{2}xe^x.$$

【316】 设函数 $y(x)$具有连续的二阶导数, 且 $y'(0)=0$, 试由方程

$$y(x) = 1 - \frac{1}{5}\int_0^x [y''(\tau) + 4y(\tau)]\mathrm{d}\tau$$

确定该函数.

解 将已知方程转化为微分方程

$$y''(x)+5y'(x)+4y(x)=0 \qquad (1)$$

并且满足初始条件

$$y(0)=1, \quad y'(0)=0 \qquad (2)$$

解问题(1)、(2)得

$$y(x)=\frac{1}{3}(4e^{-x}-e^{-4x}).$$

【317】 给定方程 $y''+py'+qy=f(x)$, 其中常数 $p>0$, $q>0$, 函数 $f(x)$在 $0\leqslant x<+\infty$上连续. 试证明:

1) 如果 $f(x)$在 $0\leqslant x<+\infty$上有界, 则上述方程的每一个解在 $0\leqslant x<+\infty$上有界;

2) 如果当 $x\to+\infty$时, $f(x)\to 0$, 则上述方程的每一个解

在 $0\to+\infty$ 时都趋于零.

证　当 $p>0$，$q>0$ 时，给定方程对应的齐次方程的基本解组有以下三种情形.

ⅰ) $p>0$，$p^2>4q$，

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x},\quad y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$$

$$\lambda_{2,1}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}<0,\quad \lambda_1+\lambda_2=-p$$

ⅱ) $p>0$，$p^2<4q$，

$$y_1(x)=e^{-\frac{p}{2}x}\cos\beta x,\quad y_2(x)=e^{-\frac{p}{2}x}\sin\beta x$$

其中 $\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$

ⅲ) $p>0$，$p^2=4q$，

$$y_1(x)=e^{-\frac{p}{2}x},\quad y_2(x)=xe^{-\frac{p}{2}x}$$

在此三种情况下，显然均有

$$\lim_{x\to+\infty}y_1(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}y_2(x)=0 \tag{1}$$

由已知齐次方程的基本解组，可运用常数变易法求得给定方程的通解

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x) \tag{2}$$

其中

$$y^*=\int_0^x\frac{y_1(\xi)y_2(x)-y_2(\xi)y_1(x)}{W[y_1(\xi),y_2(\xi)]}f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

1) 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，设 $x\in[0,+\infty)$，$|f(x)|\leqslant M$，要证明给定方程的任一解在 $[0,+\infty)$ 上有界，由(1)式知，$y_1(x)$，$y_2(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，由(2)式只须证明 $y^*(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，由朗斯基行列式的性质

$$W[y_1(\xi),y_2(\xi)]=W(0)e^{-p\xi}$$

其中 $W(0)=W[y_1(0),y_2(0)]$.

对情形 ⅰ), $W(0)=\lambda_2-\lambda_1>0$, 由(3)式

$$|y*(x)|\leqslant\frac{M}{W(0)}\left|\int_0^x[e^{\lambda_2 x}e^{(p+\lambda_1)\xi}-e^{\lambda_1 x}e^{(p+\lambda_2)\xi}]\mathrm{d}\xi\right|$$

$$\leqslant\frac{M}{W(0)}\left|\frac{1}{p+\lambda_1}e^{\lambda_2 x}[e^{(p+\lambda_1)x}-1]-\frac{1}{p+\lambda_2}e^{\lambda_1 x}[e^{(p+\lambda_2)x}-1]\right|$$

由于 $\lambda_1+\lambda_2=-p$, $\lambda_2<0$, 由上式可知, $y^*(x)$在$[0,+\infty)$上有界.

对情形 ⅱ), 由于$|\cos\beta x|\leqslant1$, $|\sin\beta x|\leqslant1$, 与情形 ⅰ)类似可证 $y^*(x)$在$[0,+\infty)$上有界.

对情形 ⅲ), $W(0)=1$, 则由(3)式得

$$|y^*(x)|\leqslant M\left|\int_0^x[xe^{-\frac{p}{2}x}e^{\frac{p}{2}\xi}-e^{-\frac{p}{2}x}\xi e^{\frac{p}{2}\xi}]\mathrm{d}\xi\right|$$

$$=M\left|xe^{-\frac{p}{2}x}\left[\frac{2}{p}(e^{\frac{p}{2}x}-1)\right]-e^{-\frac{p}{2}x}\left[\frac{2x}{p}e^{\frac{p}{2}x}-\frac{4}{p^2}(e^{\frac{p}{2}x}-1)\right]\right|$$

$$=M\left|-xe^{-\frac{p}{2}x}+\frac{4}{p^2}(1-e^{-\frac{p}{2}x})\right|$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{p}{2}x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-\frac{p}{2}x}=0$, 由上式即知 $y^*(x)$在$[0,+\infty)$上有界.

2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 要证明给定方程的任一解当 $x\to+\infty$ 时趋于零, 由(1)式,只须证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}y^*(x)=0$.

对情形 ⅰ), 由(3)式

$$\lim_{x\to+\infty}y^*(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{W(0)}\left[\frac{\int_0^x e^{(p+\lambda_1)\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi}{e^{-\lambda_2 x}}\right]$$

$$-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{W(0)}\left[\frac{\int_0^x e^{(p+\lambda_2)\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi}{e^{-\lambda_1 x}}\right]$$

上式第一项[　]用洛必达法则，$p+\lambda_1=-\lambda_2$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{-\lambda_2\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi}{e^{-\lambda_2 x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda_2 x}f(x)}{-\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}}=0$$

类似可证，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x e^{-\lambda_1\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi}{e^{-\lambda_1 x}}=0$，即得

$$\lim_{x\to+\infty}y^*(x)=0$$

对情形 ⅱ)，与情形 ⅰ)的证明类似，不再赘述.

对情形 ⅲ)，$W(0)=1$，由(3)式

$$\lim_{x\to+\infty}y^*(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\left[xe^{-\frac{p}{2}x}e^{\frac{p}{2}\xi}-e^{-\frac{p}{2}x}\xi e^{\frac{p}{2}\xi}\right]f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\int_0^x e^{\frac{p}{2}\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_0^x\xi e^{\frac{p}{2}\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi}{e^{\frac{p}{2}x}}$$

$$\xlongequal{\text{(用洛必达法则)}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{\frac{p}{2}\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\frac{p}{2}e^{\frac{p}{2}x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{p}{2}x}f(x)}{(\frac{p}{2})^2e^{\frac{p}{2}x}}=0$$

证毕.

【318】 方程

$$y''+ay'+by=f(x) \tag{1}$$

设$|f(x)|\leqslant M(-\infty<x<+\infty)$，$a,b$ 为常数，方程(1)对应的齐次方程的特征方程的根满足 $\lambda_2<\lambda_1<0$.

1) 求出当 $-\infty<x<+\infty$ 时的有界解；

2) 证明其他所有的解当 $x\to+\infty$ 时都趋于这个有界解当 $x\to+\infty$ 时的值；

3) 如果 $f(x)$ 是周期函数，则这个解也是周期的.

解 1) 方程(1)对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

利用常数变易法求得非齐次方程的通解(由上题(3)式)

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+e^{\lambda_1x}\int_{x_0}^{x}-\frac{f(\xi)e^{-\lambda_1\xi}}{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{d}\xi+e^{\lambda_2x}\int_{x_0}^{x}\frac{f(\xi)e^{-\lambda_2\xi}}{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{d}\xi \tag{2}$$

注意到 $\lambda_2<\lambda_1<0$，则非齐次方程的解

$$\tilde{y}=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{\lambda_2(x-\xi)}-e^{\lambda_1(x-\xi)}}{\lambda_2-\lambda_1}f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

2) 非齐次方程其他的任意解(2)与(3)之差的绝对值为

$$\begin{aligned}\delta(x)=|y(x)-\tilde{y}(x)|=&\Big|C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}\\&-e^{\lambda_1x}\int_{-\infty}^{x_0}-\frac{f(\xi)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1\xi}\mathrm{d}\xi-e^{\lambda_2x}\int_{-\infty}^{x_0}\frac{f(\xi)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2\xi}\mathrm{d}\xi\Big|\\\leqslant&|C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}|+\Big|e^{\lambda_1(x-x_0)}\int_{-\infty}^{x_0}-\frac{f(\xi)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1(\xi-x_0)}\mathrm{d}\xi\\&+e^{\lambda_2(x-x_0)}\int_{-\infty}^{x_0}\frac{f(\xi)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2(\xi-x_0)}\mathrm{d}\xi\Big|\\\leqslant&|C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}|+\left[m_1e^{\lambda_1(x-x_0)}+m_2e^{\lambda_2(x-x_0)}\right]\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\end{aligned}$$

(m_1,m_2 是常数)

由于 $\lambda_2<\lambda_1<0$，当 $x\to+\infty$ 时，即有 $\delta(x)\to0$. 因此，其他所

有的解当 $x\to+\infty$ 时趋于有界解 $\tilde{y}(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的值.

3) 若 $f(x)$ 是周期为 τ 的函数，那么由(3)式知

$$
\begin{aligned}
&\tilde{y}(x+\tau)\\
&= e^{\lambda_1(x+\tau)}\int_{-\infty}^{x+\tau} -\frac{f(\xi)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1\xi}\mathrm{d}\xi + e^{\lambda_2(x+\tau)}\int_{-\infty}^{x+\tau}\frac{f(\xi)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2\xi}\mathrm{d}\xi\\
&= e^{\lambda_1 x}\int_{-\infty}^{x+\tau} -\frac{f(\xi)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1(\xi-\tau)}\mathrm{d}\xi + e^{\lambda_2 x}\int_{-\infty}^{x+\tau}\frac{f(\xi)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2(\xi-\tau)}\mathrm{d}\xi\\
&= e^{\lambda_1 x}\int_{-\infty}^{x} -\frac{f(\eta)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1\eta}\mathrm{d}\eta + e^{\lambda_2 x}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(\eta)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2\eta}\mathrm{d}\eta\\
&= \tilde{y}(x)
\end{aligned}
$$

即证明了方程(1)的有界解(3)也是周期为 τ 的周期解.

§4.4　变系数线性微分方程

提　　要

对 n 阶非齐次变系数线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x) \tag{1}$$

设 $a_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$，$f(x)$ 在某区间 I 上连续，若已知对应于(1)的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=0 \tag{2}$$

的基本解组 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$，$x\in I$，即已知(2)的通解

$$y(x)=C_1y_1(x)+\cdots+C_ny_n(x),\ x\in I$$

则类似于§4.3提要中给出的常数变易法可求得(1)的通解.

但(2)没有一般的求解方法，$n=2$ 时，在下一节我们给出了幂级数解法及广义幂级数解法，本节我们介绍了对某些类型

方程用变量替换法把方程(1)降阶或化为常系数线性方程的习题，这需要一定的技巧，望读者在解题时，逐步积累经验.

题 解

【319】 利用变量变换法，求解下列方程

1) $xy''-y'+x^3y=0$;

2) $xy''+xy'^2+\frac{1}{2}y'=\frac{1}{4}$;

3) $(t-1)\ddot{x}+(t+1)\dot{x}+x=2t$

解 1) 作变换

$$t=x^2$$

则

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot 2x$$

$$y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(2x)^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot 2$$

于是，已知方程化为

$$x\left(4x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+x^3y=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{4}y=0 \tag{1}$$

方程(1)的通解为

$$y=C_1\cos\left(\frac{1}{2}t\right)+C_2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$$

将 $t=x^2$ 代入上式，得到已知方程的通解

$$y=C_1\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)+C_2\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

2）作变量代换

$$t=\sqrt{x}, \qquad u=e^y$$

则

$$x=t^2, \qquad y=\ln u$$

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d(\ln u)}{dt}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y''=\left[\left(-\frac{1}{u^2}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dt^2}\right)\right]\frac{1}{(2\sqrt{x})^2}-\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

于是，已知方程化为

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]-\frac{1}{4t}\frac{1}{u}\frac{du}{dt}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dt}\right)^2$$

$$+\frac{1}{4t}\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dt}=\frac{1}{4}$$

即

$$\frac{d^2u}{dt^2}-u=0 \tag{2}$$

方程(2)的通解为

$$u=C_1e^t+C_2e^{-t}$$

将 $t=\sqrt{x}$，$u=e^y$代入上式，得到已知方程的通解为

$$y=\ln(C_1e^{\sqrt{x}}+C_2e^{-\sqrt{x}})$$

3）作变换

$$y=(t-1)x$$

则

$$\frac{dy}{dt}=x+(t-1)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2\frac{dx}{dt}+(t-1)\frac{d^2x}{dt^2}$$

于是，已知方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=2t \tag{3}$$

方程(3)的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-t}+t^2-2t$$

将 $y=(t-1)x$ 代入上式，得到已知方程的通解为

$$x=C_1\frac{1}{t-1}+C_2\frac{e^{-t}}{t-1}+\frac{t^2-2t}{t-1}.$$

【320】 设 $y_1(x)$是 n 阶线性齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \tag{1}$$

的一个非零解. 试证明：利用线性变换 $y=y_1z$ 可将方程(1)化为 $n-1$ 阶齐次方程.

解 因为

$$y^{(n)}=y_1z^{(n)}+ny_1'z^{(n-1)}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}y_1^{(k)}z^{(n-k)}$$
$$+\cdots+ny_1^{(n-1)}z'+y_1^{(n)}z$$

$$a_1y^{(n-1)}=a_1y_1z^{(n-1)}+a_1(n-1)y_1'z^{(n-2)}+\cdots+a_1y_1^{(n-1)}z$$

…………

$$a_{n-1}y'=a_{n-1}y_1'z+a_{n-1}y_1z'$$

$$a_ny=a_ny_1z$$

于是，方程(1)化为

$$\left(y_1z^{(n)}+ny_1'z^{(n-1)}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}y_1^{(k)}z^{(n-k)}+\cdots+ny_1^{(n-1)}z'+y_1^{(n)}z\right)+\cdots+(a_{n-1}y_1'z+a_{n-1}y_1z')+a_ny_1z=0$$

即

$$y_1z^{(n)}+(ny_1'+a_1y_1)z^{(n-1)}+\cdots$$
$$+(y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\cdots+a_ny_1)z=0$$

因为 y_1 是方程(1)的解，所以上式中 z 的系数为零. 由此，令 $u=z'$，则方程(1)可降为 $n-1$ 阶的齐次方程.

【321】 如果已知二阶线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1}$$

的一个非零解 y_1，求方程(1)的通解.

解 习题 275 中，利用刘维尔公式将方程(1)降为一阶线性方程后，求得它的通解，本题使用上一题的结论来解题.

作线性变换

$$y=y_1z$$

则方程(1)化为

$$y_1z''+(2y_1'+py_1)z'=0$$

再令 $u=z'$得

$$y_1u'+(2y_1'+py_1)u=0$$

易求得它的通解

$$u=\frac{C_2}{y_1^2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

于是

$$z=C_1+C_2\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

因此，方程(1)的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

【322】 已知下列方程的一个特解 y_1，求其通解：

1) $(x-1)y''-xy'+y=0$，$y_1=x$；

2) $(1-\ln x)y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$, $y_1=\ln x$;

3) $x^3y''-xy'+y=0$, $y_1=x$

解 利用上一题的结论来求上述方程的通解.

1) $y = C_1x + C_2x\int \frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{-x}{x-1}}dx$

$$上式右边= C_1x + C_2x\int \frac{1}{x^2}e^{[x+\ln(x-1)]}dx$$

$$= C_1x + C_2x\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx$$

$$= C_1x + C_2e^x$$

因而所求通解为

$$y = C_1x + C_2e^x$$

2) $y = C_1\ln x + C_2\ln x\int \frac{1}{\ln^2 x}e^{-\int\frac{1}{x(1-\ln x)}dx}dx$

$$上式右边 = C_1\ln x + C_2\ln x\int \frac{e^{\ln|\ln x-1|}}{\ln^2 x}dx$$

$$= C_1\ln x + C_2\ln x\int \frac{|\ln x-1|}{\ln^2 x}dx$$

$$= C_1\ln x + C_2x.$$

因而所求通解为

$$y = C_1\ln x + C_2x$$

3) $y = C_1x + C_2x\int \frac{1}{x^2}e^{\int\frac{1}{x^2}dx}dx$

$$上式右边 = C_1x + C_2x\int \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx = C_1x + C_2xe^{-\frac{1}{x}}$$

因而所求通解为

$$y=C_1x+C_2xe^{-\frac{1}{x}}.$$

【323】 已知方程$(1-x^2)y'''-xy''+y'=0$的一个特解 y_1

$=x^2$，求其通解.

解　作变换

$$z=y'$$

则已知方程化为

$$(1-x)^2z''-xz'+z=0 \tag{1}$$

因为 $y_1=x^2$ 为已知方程的解，故 $z_1=2x$ 为(1)的解，由习题 321 知方程(1)的与 z_1 线性无关的解为

$$z_2=2x\int\frac{1}{(2x)^2}e^{-\int\frac{(-x)}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$上式右边=2x\int\frac{1}{4x^2}e^{-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{2}\left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

即得

$$y_2(x)=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

并且，由观察知，$y=C$ 为已知方程的解. 所以，$y_1=x^2$，$y_2=(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$，$y_3=C$ 为已知方程在 $(-1,1)$ 上的线性无关解，因此，方程的通解为

$$y=C_1+C_2x^2+C_3(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x).$$

【324】　已知方程 $(1-x^2)y''+2xy'-2y=-2$ 对应的齐次线性方程的一个特解 $y_1=x$，求该方程的通解.

解　根据习题 321 的结论，已知方程对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1x+C_2x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$\text{上式右边} = C_1x + C_2x\int \frac{1}{x^2}e^{\ln|x^2-1|}\mathrm{d}x$$

$$= C_1x + C_2x\int \frac{x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= C_1x + C_2(x^2+1)$$

即得齐次方程的通解

$$y = C_1x + C_2(x^2+1)$$

再求已知方程形如

$$y^*(x) = C_1(x)x + C_2(x)(x^2+1)$$

的一个特解. 利用常数变易法，得到方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)(x^2+1) = 0 \\ C_1'(x) + 2xC_2'(x) = \dfrac{-2}{1-x^2} \end{cases}$$

解之，得

$$C_1'(x) = -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}, \qquad C_1(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$C_2'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}, \qquad C_2(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

故已知方程的通解为

$$y = C_1x + C_2(x^2+1) + 1.$$

【325】 求方程 $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ 的通解，已知它的一个特解为 $y_1 = x$.

解 作变换

$$y = xz$$

则有

$$y' = z + xz'$$

$$y'' = 2z' + xz''$$

$$y''' = 3z'' + xz'''$$

将 y，y'，y''，y'''代入已知方程，整理得

$$x^4 z''' = 0 \qquad (x \neq 0)$$

故

$$z''' = 0$$

解得

$$z = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

因此，已知方程的通解为

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x.$$

【326】 求方程 $t\dddot{x} + 3\ddot{x} - t\dot{x} - x = 0$ 的通解，已知它的一个特解为 $x_1 = \frac{1}{t}$.

解　作变换

$$x = \frac{1}{t}y$$

则有

$$\dot{x} = \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t^2}y.$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{t^2}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t^3}y$$

$$\dddot{x} = \frac{1}{t}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{3}{t^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{6}{t^3}\frac{dy}{dt} - \frac{6}{t^4}y.$$

将 x，$\dot{x}$，$\ddot{x}$，$\dddot{x}$ 代入已知方程，得

$$\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dt} = 0 \tag{1}$$

再令

$$\frac{dy}{dt} = z$$

则有

$$\frac{d^3y}{dt^3}=\frac{d^2z}{dt^2}$$

因此(1)写为

$$\frac{d^2z}{dt^2}-z=0$$

解之，得

$$z=C_1e^t+C_2e^{-t}$$

故(1)的通解为

$$y=C_1e^t-C_2e^{-t}+C_3,$$

所以，已知方程的通解为

$$x=C_1\frac{e^t}{t}-C_2\frac{e^{-t}}{t}+C_3\frac{1}{t}.$$

【327】 设 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$是对应于二阶线性方程

$$\ddot{x}(t)+a_1(t)\dot{x}(t)+a_2(t)x(t)=f(t) \tag{1}$$

的齐次方程的基本解组，其中 $a_1(t)$，$a_2(t)$，$f(t)$在$[a,b]$上连续. 试证：(1)在$[a,b]$上的通解为

$$x(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi_1(\tau)\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\varphi_2(\tau)}{W[\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)]}f(\tau)d\tau \quad (t_0\in[a,b])$$

证 与(1)对应的齐次方程的通解为

$$x(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)$$

其中 C_1，C_2 为任意常数. 利用常数变易法将(1)的解表为

$$x(t)=C_1(t)\varphi_1(t)+C_2(t)\varphi_2(t) \tag{2}$$

得 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足的代数方程组

$$\begin{cases} C_1'(t)\varphi_1(t)+C_2'(t)\varphi_2(t)=0 \\ C_1'(t)\varphi_1'(t)+C_2'(t)\varphi_2'(t)=f(t) \end{cases}$$

解得

$$C_1'(t)=-\frac{\varphi_2(t)f(t)}{W[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]}$$

$$C_2'(t)=\frac{\varphi_1(t)f(t)}{W[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]}$$

积分上式，得

$$C_1(t)=\int_{t_0}^{t}-\frac{f(\tau)\varphi_2(\tau)}{W[\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)]}\mathrm{d}\tau$$

$$C_2(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{f(\tau)\varphi_1(\tau)}{W[\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)]}\mathrm{d}\tau$$

代入(2)式得(1)的通解

$$x(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{[\varphi_1(\tau)\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\varphi_2(\tau)]f(\tau)}{W[\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)]}\mathrm{d}\tau.$$

【328】 二阶变系数线性齐次方程($p_1(x)$，$p_2(x)$在区间 I 上连续)

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \tag{1}$$

的系数 $p_1(x)$，$p_2(x)$满足什么条件时，可经适当的线性变换

$$y=a(x)z \tag{2}$$

(其中 $a(x)$是待定函数)，化为不含一阶导数项的常系数线性齐次方程？

解 将变换(2)代入方程(1)中，得

$$a(x)z''+[2a'(x)+p_1(x)a(x)]z'+[a''(x)+p_1(x)a'(x)+p_2(x)a(x)]z=0 \tag{3}$$

要使(3)为常系数线性齐次方程，必须选取 $a(x)$，使得 z''，

z'，z 的系数为常数. 令 z'的系数为零，可求得

$$a(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}$$

将上式代入(3)中，得

$$z'' + [p_2(x) - \frac{1}{4}p_1^2(x) - \frac{1}{2}p_1'(x)]z = 0$$

当 z 的系数

$$I(x) \triangleq p_2(x) - \frac{1}{4}p_1^2(x) - \frac{1}{2}p_1'(x) \tag{4}$$

为常数时，(3)为不含一阶导数项的常系数齐次方程.

一般地，对于 n 阶变系数线性齐次方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{5}$$

可经变换

$$y = b(x)z$$

其中 $b(x) = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)\mathrm{d}x}$，将方程(5)化为不含 $n-1$ 阶导数项的 n 阶微分方程.

【329】 试证明：可用变换 $x = u(t)y$ 使两个二阶齐次线性方程互化的充要条件是它们的 $I(t)$ 恒等. 其中 $I(t)$ 的定义同习题 328.

证 设两个二阶齐次线性方程分别为

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0 \tag{1}$$

$$\ddot{x} + b_1(t)\dot{x} + b_2(t)x = 0 \tag{2}$$

分别作变换

$$x = e^{-\frac{1}{2}\int a_1(t)\mathrm{d}t}y \tag{3}$$

和

$$x = e^{-\frac{1}{2}\int b_1(t)\mathrm{d}t} y \tag{4}$$

使得方程(1)、(2)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + I_1(t)y = 0$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + I_2(t)y = 0$$

由上题(4)式知

$$I_1(t) = a_2(t) - \frac{1}{4}a_1^2(t) - \frac{1}{2}a_1'(t),$$

$$I_2(t) = b_2(t) - \frac{1}{4}b_1^2(t) - \frac{1}{2}b_1'(t)$$

如果 $I_1(t)\equiv I_2(t)$，则(3)、(4)为同一个方程，(4)在变换

$$y = e^{\frac{1}{2}\int b_1(t)\mathrm{d}t} x$$

的作用下，可化为(2). 因此，经变换

$$x = u(t)y$$

其中

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}\int [a_1(t)-b_1(t)]\mathrm{d}t}$$

方程(1)可化为(2). 同样地，方程(2)可化为(1)，故(1)、(2)可以互化.

反过来，如果方程(1)、(2)可以互化，则(3)、(4)可以互化，故 $I_1(t)\equiv I_2(t)$.

【330】 求下列方程的通解：

1) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$;　(1)

2) $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$;　(2)

3) $(1-x^2)y''-4xy'-(1+x^2)y=0.$ (3)

解 1) 由 328 题(4)知

$$I(x)=\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)'=1$$

是常数，故已知方程可化为不含一阶导数项的常系数齐次微分方程. 作变换

$$y=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}z=\frac{1}{\sqrt{x}}z$$

于是，方程(1)化为

$$z''+z=0 \tag{4}$$

方程(4)的通解为

$$z=C_1\cos x+C_2\sin x$$

因此，方程(1)的通解为

$$y=C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

2) $I(x)=\left(1+\frac{2}{x^2}\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x}\right)'=1$

作变换

$$y=e^{-\frac{1}{2}\int\left(-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x}z=xz$$

方程(2)化为(4). 因此，方程(2)的通解为

$$y=x(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

3) $I(x)=\left(-\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{4x}{1-x^2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(-\frac{4x}{1-x^2}\right)'=1$

作变换

$$y=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{(-4x)}{1-x^2}\mathrm{d}x}z=\frac{1}{1-x^2}z$$

方程(3)化为(4)，因此，方程(3)的通解为

$$y=\frac{C_1\cos x+C_2\sin x}{1-x^2}.$$

方程(1)、(2)、(3)的 $I(x)$ 均等于常数 1，它们分别经过适当的变换化为常系数齐次方程(4)后求解，由上一题的结论知，方程(1)、(2)、(3)可以互化.

【331】 求方程 $y''+y'\tan x-y\cos^2 x=0$ 的通解.

解 作变换

$$t=\int e^{-\int \tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int e^{\ln\cos x}\mathrm{d}x=\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x$$

此时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\cos x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\cos^2 x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\sin x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

于是，已知方程化为

$$\left(\cos^2 x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\sin x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+\left(\cos x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\tan x-y\cos^2 x=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y=0\tag{1}$$

方程(1)的通解为

$$y=C_1e^t+C_2e^{-t}$$

所以，已知方程的通解为

$$y=C_1e^{\sin x}+C_2e^{-\sin x}.$$

【332】 求方程 $x^2y^{(4)}+8xy'''+12y''+x^2y=2e^x$ 的通解.

解 为了消去三阶导数项，作变换

$$y=e^{-\frac{1}{4}\int\frac{8}{x}\mathrm{d}x}\cdot z=\frac{1}{x^2}z$$

此时

$$y' = z'\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x^3}z$$

$$y'' = z''\frac{1}{x^2} - 4z'\frac{1}{x^3} + 6\frac{1}{x^4}z$$

$$y''' = z'''\frac{1}{x^2} - 6z''\frac{1}{x^3} + 18z'\frac{1}{x^4} - 24\frac{1}{x^5}z$$

$$y^{(4)} = z^{(4)}\frac{1}{x^2} - 8z'''\frac{1}{x^3} + 36z''\frac{1}{x^4} - 96z'\frac{1}{x^5} + 120\frac{1}{x^6}z$$

于是，已知方程化为

$$z^{(4)} + z = 2e^x \tag{1}$$

方程(1)的通解为

$$z = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^x$$

所以，已知方程的通解为

$$y = \frac{1}{x^2}\left[e^x + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

【333】 对二阶线性齐次方程

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{1}$$

试证明：可用变换

$$y = e^{\int z\mathrm{d}x}$$

把它降为一阶，化为黎卡提方程

$$z' = -z^2 - p_1(x)z - p_2(x)$$

反之，对于黎卡提方程

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{2}$$

试证：可用变换

$$y = -\frac{1}{p(x)} \cdot \frac{u'}{u}$$

把它化为二阶线性方程

$$pu'' - (pq + p')u' + p^2 ru = 0$$

证　作变换

$$y = e^{\int z\mathrm{d}x}$$

则有

$$y' = z(x)\, e^{\int z\mathrm{d}x}$$

$$y'' = z'(x)\, e^{\int z\mathrm{d}x} + z^2(x)\, e^{\int z\mathrm{d}x}$$

将 y，y'，y'' 代入方程(1)中，整理得

$$z' = -z^2 - p_1(x)z - p_2(x)$$

反过来，对于方程(2)，作变换

$$y = -\frac{1}{p(x)} \cdot \frac{u'}{u}$$

则有

$$y' = \frac{p'(x)}{p^2(x)} \cdot \frac{u'}{u} - \frac{1}{p(x)} \cdot \frac{u''u - u'^2}{u^2}$$

将上式代入(2)中，整理得

$$pu'' - (pq + p')u' + p^2 ru = 0.$$

【334】　形如

$$x^n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + \cdots + a_{n-1}x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0 \tag{1}$$

的方程称为欧拉(Euler)方程，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数．试

证明这种类型的方程可通过变换 $x=e^t$ 化成常系数线性齐次微分方程.

解 作变换

$$x=e^t \quad (x>0)$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=e^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

用归纳法可以证明：对一切正整数 n 都有

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=e^{-nt}\left(\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+\beta_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+\beta_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1}$都是常数. 于是

$$x^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+\beta_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+\beta_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

将上述关系式代入方程(1)中，得到常系数齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+b_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+b_ny=0$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是常数.

【335】 求解下列变系数齐次线性方程(欧拉方程)

1) $x^2y''+3xy'+y=0$;

2) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$

解 1) 作变换

$$x=e^t \qquad (x>0)$$

则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

已知方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0 \tag{1}$$

方程(1)的通解为

$$y=C_1te^{-t}+C_2e^{-t}$$

将 $t=\ln x$ 代入上式，得到已知方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(C_1\ln x+C_2)$$

2）作变换

$$x=e^t \qquad (x>0)$$

则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)$$

已知方程化为

$$\frac{d^3y}{dt^3}-6\frac{d^2y}{dt^2}+11\frac{dy}{dt}-6y=0 \tag{2}$$

方程(2)的通解为

$$y=C_1e^{3t}+C_2e^{2t}+C_3e^t$$

将 $t=\ln x$ 代入上式，得到原方程的通解为

$$y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x.$$

【336】 试证明：通解形如 $y=C_1x+C_2x\ln x+C_3x(\ln x)^2$ 的微分方程为三阶欧拉方程.

证 由 $y=C_1x+C_2x\ln x+C_3x(\ln x)^2$ 可得

$$y'=C_1+C_2(\ln x+1)+C_3[(\ln x)^2+2\ln x]$$

$$y''=C_2\frac{1}{x}+C_3\left(2\frac{1}{x}\ln x+\frac{2}{x}\right)$$

$$y'''=C_2\left(-\frac{1}{x^2}\right)+C_3\left(-\frac{2}{x^2}\ln x+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$=C_2\left(-\frac{1}{x^2}\right)+C_3\left(-\frac{2}{x^2}\ln x\right)$$

要从上述四个式子中消去 C_1,C_2,C_3，则应有

$$\begin{vmatrix} y & x & x\ln x & x(\ln x)^2 \\ y' & 1 & \ln x+1 & (\ln x)^2+2\ln x \\ xy'' & 0 & 1 & 2(\ln x+1) \\ x^2y''' & 0 & -1 & -2\ln x \end{vmatrix}=0$$

将上式按第一列展开

$$y\begin{vmatrix} 1 & \ln x+1 & (\ln x)^2+2\ln x \\ 0 & 1 & 2(\ln x+1) \\ 0 & -1 & -2\ln x \end{vmatrix}-y'\begin{vmatrix} x & \ln x & x(\ln x)^2 \\ 0 & 1 & 2(\ln x+1) \\ 0 & -1 & -2\ln x \end{vmatrix}$$

$$+xy''\begin{vmatrix} x & x\ln x & x(\ln x)^2 \\ 1 & \ln x+1 & (\ln x)^2+2\ln x \\ 0 & -1 & -2\ln x \end{vmatrix}$$

$$-x^2y'''\begin{vmatrix} x & x\ln x & x(\ln x)^2 \\ 1 & \ln x+1 & (\ln x)^2+2\ln x \\ 0 & 1 & 2(\ln x+1) \end{vmatrix}=0$$

由此得 $x^3y'''+xy'-y=0$，它是三阶欧拉方程.

【337】 求下列非齐次方程的通解：

1) $t^2\ddot{x}-4t\dot{x}+6x=t$;

2) $x^2y''-2xy'+2y=x\ln x$.

解　1) 对应的齐次方程

$$t^2\ddot{x}-4t\dot{x}+6x=0$$

为欧拉方程. 作变换

$$t=e^u$$

于是已知方程化为

$$\frac{d^2x}{du^2}-5\frac{dx}{du}+6x=e^u \tag{1}$$

利用待定系数法，求得(1)的通解为

$$x=C_1e^{2u}+C_2e^{3u}+\frac{1}{2}e^u$$

将 $u=\ln t$ 代入上式，得到已知方程的通解为

$$x(t)=C_1t^2+C_2t^3+\frac{1}{2}t.$$

2) 作变换

$$x=e^t$$

已知方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=te^t \tag{2}$$

方程(2)对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t}$$

因为 1 是一重特征根，故(1)有形如

$$y_1=(At^2+Bt)e^t$$

的特解. 利用待定系数法，得

$$A=-\frac{1}{2},\qquad B=-1$$

所以,(2)的通解为

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t}+\left(-\frac{1}{2}t^2-t\right)e^t$$

将 $t=\ln x$ 代入上式，得到已知方程的通解为

$$y=x\left[C_1-\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x\right]+C_2x^2.$$

【338】 求方程$(2x+1)^2y''-4(2x+1)y'+8y=0$的通解.

解 作变换

$$z=2x+1$$

则有

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4\frac{d^2y}{dz^2}$$

已知方程化为

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+2y=0 \tag{1}$$

再作变换

$$z=e^t$$

则有

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{z}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{z^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

于是方程(1)化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=0 \tag{2}$$

方程(2)的通解为

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t}.$$

将 $t=\ln(2x+1)$代入上式，得到所求方程的通解

$$y=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)^2.$$

【339】 利用变换 $u=\tan y$ 求方程 $x^2y''+2x^2(\tan y)y'^2+xy'-\sin y\cos y=0$ 的通解.

解 作变换

$$u=\tan y$$

则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{2u}{(1+u^2)^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

并且

$$\sin y\cos y=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{u}{1+u^2}$$

将上述关系式代入已知方程，得到

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}-u=0 \tag{1}$$

(1)为欧拉方程，其通解为

$$u=C_1x+C_2\frac{1}{x}$$

将 $y=\arctan u$ 代入上式，得到已知方程的通解

$$y=\arctan\left(C_1x+C_2\frac{1}{x}\right).$$

【340】 利用变换 $u=xy$ 求方程 $x(x+1)^2y''+(3x+2)(x+1)y'+y=\ln(x+1)$ 的通解.

解 作变换

$$u=xy$$

则有

$$y'=\frac{u'}{x}-\frac{u}{x^2}$$

$$y''=\frac{u''}{x}-2\frac{u'}{x^2}+2\frac{u}{x^3}$$

于是，已知方程化为

$$(x+1)^2u''+(x+1)u'-u=\ln(x+1) \tag{1}$$

(1)为欧拉方程，其通解为

$$u=C_1(x+1)+\frac{C_2}{x+1}-\ln(x+1)$$

将 $y=\frac{u}{x}$ 代入上式，得到已知方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}\left[C_1(x+1)+\frac{C_2}{x+1}-\ln(x+1)\right].$$

【341】 求方程 $xy'''+2y''=0$ 的通解.

解 方程两端同时乘以 x^2，得

$$x^3y'''+2x^2y''=0 \tag{1}$$

(1)为欧拉方程，其通解为

$$y=C_1+C_2\ln x+C_3x.$$

【342】 求方程 $y''+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{(x+1)^2}y=0$ 的通解.

解 为了消去一阶导数项，作变换

$$y=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2}{x}dx}\cdot z=\frac{1}{x}z$$

此时

$$y' = \frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z,$$

$$y'' = \frac{1}{x}z'' - \frac{2}{x^2}z' + \frac{2}{x^3}z.$$

于是，已知方程化为

$$\left(\frac{1}{x}z'' - \frac{2}{x^2}z' + \frac{2}{x^3}z\right) + \frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z\right) - \frac{2}{(x+1)^2}\frac{1}{x}z = 0$$

即

$$(x+1)^2 z'' - 2z = 0 \tag{1}$$

再作变换

$$x + 1 = e^t$$

方程(1)化为

$$z'' - z' - 2z = 0 \tag{2}$$

得(2)的通解

$$z = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$$

所以，代回原变量得已知方程的通解为

$$y = \frac{1}{x}[C_1(x+1)^2 + C_2(x+1)^{-1}].$$

【343】 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$，$f(r)$具有二阶导数，且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

求 $f(r)$.

解 直接计算，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)\left(-\frac{x^2}{r^2}+1\right)$$

因为 x, y, z 是对称的，故

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)\left(-\frac{y^2}{r^2}+1\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{z^2}{r^2}f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)\left(-\frac{z^2}{r^2}+1\right)$$

将上述关系代入

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

得到

$$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$$

解得

$$f(r)=C_1+\frac{C_2}{r}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

【344】 设方程

$$\ddot{x}+a(t)\dot{x}+b(t)x=0 \tag{1}$$

其中 $a(t)$, $b(t)$连续，求证：

1) $x=t$ 是(1)的特解，如果 $a(t)+b(t)\cdot t=0$;

2) $x=e^{mt}$是(1)的特解，如果 $m^2+ma(t)+b(t)=0$.

证 1) 将 $x=t$ 代入方程(1)的左端，得到

$$a(t)+tb(t)=0$$

故 $x=t$ 是方程(1)的特解.

2) 将 $x=e^{mt}$代入(1)的左端，则有

$$m^2e^{mt}+ma(t)e^{mt}+b(t)e^{mt}=0$$

即

$$m^2+ma(t)+b(t)=0$$

故 $x=e^{mt}$是方程(1)的特解.

【345】 求下列齐次方程的通解：

1) $t^2x''+tx'-x=0$;

2) $tx''-2(1+t)x'+(2+t)x=0\quad(t\neq 0)$.

解　1) 该方程的系数显然满足上题中 1)的条件，故

$$x=t$$

是它的一个特解. 再根据 321 题的结论，给定方程的通解为

$$x=C_1t+C_2t\int\frac{1}{t^2}e^{-\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t}dt$$

再经简单计算得

$$x=C_1t+C_3\frac{1}{t}$$

其中 $C_3=-\frac{1}{2}C_2$.

2) 该方程的系数满足上题中 2)的条件($m=1$)，故

$$x=e^t$$

是它的一个特解. 该方程的通解为

$$x=C_1e^t+C_2e^t\int\frac{1}{e^{2t}}e^{-\int\frac{-2(1+t)}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

即

$$x=C_1e^t+\frac{1}{3}C_2t^3e^t=C_1e^t+C_3t^3e^t$$

其中 $C_3=\frac{1}{3}C_2$.

【346】 求下列非齐次方程的通解：

1) $t^2(t+1)\ddot{x}-t(2+4t+t^2)\dot{x}+(2+4t+t^2)x=-t^4-2t^3$;

2) $t\ddot{x}-(2t+1)\dot{x}+(t+1)x=(t^2+t-1)e^{2t}$.

解 1) 该方程的系数满足 344 题中 1)的条件，故

$$x=t$$

是它对应的齐次方程的一个特解. 再根据 321 题的结论，可求得齐次方程的通解为

$$x=(C_1+C_2te^t)t$$

现在求已知方程形如

$$x_1(t)=C_1(t)t+C_2(t)t^2e^t$$

的特解. 利用常数变易法，得到方程组

$$\begin{cases}C_1'(t)t+C_2'(t)t^2e^t=0\\ C_1'(t)+C_2'(t)(2t+t^2)e^t=-\dfrac{t^2+2t}{t+1}\end{cases}$$

解之，得

$$C_1(t)=t+\frac{1}{t+1},\qquad C_2(t)=\frac{1}{t+1}e^{-t}.$$

所以，所求通解为

$$x(t)=C_1t+C_2t^2e^t+t^2.$$

2) 该方程的系数满足 344 题 2)的条件($m=1$)，故

$$x=e^t$$

是它对应的齐次方程的一个特解，其通解为

$$x(t)=C_1e^t+C_2t^2e^t$$

现在求已知方程形如

$$x_1(t)=C_1(t)e^t+C_2(t)t^2e^t$$

的特解. 利用常变易法，得到方程组

$$\begin{cases}C_1'(t)e^t+C_2'(t)t^2e^t=0\\ C_1'(t)e^t+C_2'(t)(t^2+2t)e^t=\dfrac{t^2+t-1}{t}e^{2t}\end{cases}$$

解之，得

$$C_1(t)=\frac{1}{2}(t-t^2)e^t,\qquad C_2(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)e^t$$

所以，所求通解为

$$x(t)=C_1e^t+C_2t^2e^t+te^{2t}.$$

【347】 求方程$(1-t^2)\dddot{x}-t\ddot{x}+\dot{x}=0$的通解.

解 作变换

$$u=\dot{x}$$

则已知方程化为

$$(1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}-t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=0\tag{1}$$

因为方程(1)的系数满足 344 题 1)中的条件，故

$$u=t$$

是方程(1)的一个特解. 再根据 321 题的结论，得到方程(1)的通解为

$$u=C_1t+C_2\sqrt{1-t^2}$$

所以，已知方程的通解为

$$x=\frac{C_1}{2}t^2+\frac{C_2}{2}(t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t)+C_3.$$

【348】 求方程$y''-xf(x)y'+f(x)y=0$的通解.

解 该方程的系数满足 344 题 1)中的条件，故

$$y=x$$

是它的一个特解，它的通解为

$$y = C_1x + C_2x\int \frac{1}{x^2}e^{\int xf(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

§4.5 幂级数解法

提 要

定理 1 设二阶变系数齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1}$$

如果 $p(x)$，$q(x)$在某点 x_0 的邻域 D：$|x-x_0|<R$ 内解析，即它们可以展成$(x-x_0)$的幂级数，则方程(1)的解在 x_0 的邻域 D 内也能展成$(x-x_0)$的幂级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

定理 2 如果方程(1)的系数满足$(x-x_0)p(x)$，$(x-x_0)^2q(x)$在 x_0 的邻域 D：$|x-x_0|<R$ 内解析，则方程(1)的解在$0<|x-x_0|<R$ 内可以展成如下的$(x-x_0)$的广义幂级数

$$y=(x-x_0)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

其中 ρ 是某一实数，$a_0\neq0$.

题 解

【349】 试用幂级数解法求解下列方程：

1) $y''+xy'+y=0$;

2) $y''+x^2y'=0$;

3) $\ddot{x}-t\dot{x}-x=0$.

解　1) 显然 $p(x)=x$, $q(x)=1$ 可在 $x_0=0$ 的邻域展成幂级数，故原方程有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1}$$

的幂级数解. 将(1)及其导数代入原方程，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

即

$$(2a_2+a_0)+\sum_{n=3}^{\infty}[n(n-1)a_n+(n-1)a_{n-2}]x^{n-2}=0$$

令 x 的同次幂系数为零，得

$$2a_2+a_0=0,\ 3\cdot2a_3+2a_1=0,\cdots,$$
$$n(n-1)a_n+(n-1)a_{n-2}=0\quad(n\geqslant4)$$

从而

$$a_2=-\frac{a_0}{2},\ a_3=-\frac{a_1}{3},\ \cdots,\ a_n=-\frac{a_{n-2}}{n},\ \cdots,$$

即有

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{1}{2^nn!}a_0,\ a_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}a_1\quad(n\geqslant1)$$

所以，通解为

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}x^{2n+1}$$

即

$$y=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}x^{2n+1}$$

2) $p(x)=x^2$, $q(x)=0$ 在 $x_0=0$ 的邻域可展成幂级数，

故原方程具有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{2}$$

的幂级数解. 将(2)及其导数代入原方程，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=0$$

即

$$2a_2+3\cdot2a_3x+\sum_{n=4}^{\infty}[n(n-1)a_n+(n-3)a_{n-3}]x^{n-2}=0$$

令 x 的同次幂系数为零，得

$$2a_2=0,\ 3\cdot2a_3=0,\ \cdots,\ (n-1)na_n+(n-3)a_{n-3}=0\quad(n\geqslant4)$$

从而

$$a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=-\frac{1}{4\cdot3}a_1,\ \cdots,\ a_n=-\frac{n-3}{n(n-1)}a_{n-3}$$

即有

$$a_{3n+1}=\frac{(-1)^n\cdot1\cdot4\cdot7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot\cdots\cdot3n(3n+1)}a_1,\ a_{3n-1}=0,$$

$$a_{3n}=0\qquad(n\geqslant1)$$

所以，通解为

$$y=a_0+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot1\cdot4\cdot7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot\cdots\cdot3n(3n+1)}x^{3n+1}\right]$$

3) $p(t)=-t$, $q(t)=-1$ 可在 $t_0=0$ 的邻域展成幂级数，故原方程有形如

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n \tag{3}$$

的幂级数解. 将(3)及其导数代入原方程，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nt^{n-2}-t\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

即

$$(2a_2-a_0)+\sum_{n=3}^{\infty}[(n-1)na_n-(n-1)a_{n-2}]t^{n-2}=0$$

令 x 的同次幂系数为零，得

$$2a_2-a_0=0,\ 3\cdot2a_3-2a_1=0,\ \cdots,\ (n-1)na_n-(n-1)a_{n-2}=0$$

从而

$$a_2=\frac{1}{2}a_0,\ a_3=\frac{1}{3}a_1,\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n}a_{n-2}$$

即有

$$a_{2n}=\frac{1}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}a_0$$
$$a_{2n+1}=\frac{1}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}a_1\quad(n\geqslant1)$$

所以，通解为

$$x=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}t^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}t^{2n+1}.$$

【350】 试用幂级数法求解下列初值问题：

1) $\ddot{x}-tx=0$; $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$;

2) $\ddot{x}+t\dot{x}+x=0$, $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$;

3) $(1-x^2)y''-xy'+\frac{1}{9}y=0$, $y(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y'(0)=\frac{1}{6}$.

解 1) $p(t)=0$, $q(t)=-t$ 在 $t_0=0$ 邻域可展成幂级数，故原方程具有形如

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$$

的幂级数解．由于

$$x=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots \tag{1}$$

$$\dot{x}=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots \tag{2}$$

$$\ddot{x}=2a_2+6a_3t+\cdots+(n-1)na_nt^{n-2}+\cdots$$

将上述关系式代入原方程，得

$$2a_2+6a_3t+\cdots+(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n+\cdots-t(a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n+\cdots)=0$$

令 x 的同次幂系数为零，得

$$a_2=0,\ 6a_3-a_0=0,\ 4\cdot3a_4-a_1=0,\ \cdots,\ n(n+1)a_{n+1}-a_{n-2}=0$$

从而

$$a_2=0,\ a_3=\frac{1}{2\cdot3}a_0,\ a_4=\frac{1}{4\cdot3}a_1,\ \cdots,\ a_{n+1}=\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}$$

即有

$$a_{3k}=\frac{a_0}{2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(3k-1)3k},$$

$$a_{3k+1}=\frac{a_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot\cdots\cdot3k(3k+1)},\ a_{3k-1}=0\quad(k\geqslant1)$$

将 $x(0)=1$，$\dot{x}(0)=0$ 代入(1)、(2)，得

$$a_0=1,\qquad a_1=0$$

因此

$$a_0=1,\ a_2=0,\ a_3=\frac{1}{2\cdot3},\ \cdots,$$

$$a_{3k}=\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot\cdots\cdot(3k-1)3k},\ a_{3k+1}=0,\ a_{3k-1}=0\qquad(k\geqslant1)$$

故初值问题的解为

$$x=1+\frac{1}{2\cdot3}t^3+\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6}t^6+\cdots+\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot\cdots\cdot(3k-1)3k}t^{3k}+\cdots$$

2）由 349 题的 1)知，原方程的通解为

$$x=a_0e^{-\frac{t^2}{2}}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}t^{2n+1} \tag{3}$$

因为方程具有形如

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n \tag{4}$$

的解，且

$$\dot{x}=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots \tag{5}$$

将 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=1$ 代入(4)、(5)得

$$a_0=0,\qquad a_1=1$$

因此由(3)式得到初值问题的解为

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}t^{2n+1}$$

3) $p(x)=\dfrac{-x}{1-x^2}$，$q(x)=\dfrac{1}{9(1-x^2)}$ 在 $x_0=0$ 的邻域可展成 x 的幂级数，故原方程具有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{6}$$

的幂级数解. 将(6)式代入原方程，得

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

即

$$\left(2a_2+\frac{1}{9}a_0\right)+\left[3\cdot 2a_3-\left(1-\frac{1}{9}\right)a_1\right]x$$
$$+\sum_{n=4}^{\infty}\left\{(n-1)na_n-\left[(n-2)^2-\frac{1}{9}\right]a_{n-2}\right\}x^{n-2}=0$$

令 x 的同次幂系数为零，得

$$2a_2+\frac{1}{9}a_0=0,\ 3\cdot 2a_3-\left(1-\frac{1}{9}\right)a_1=0,\ \cdots,$$

$$(n-1)na_n-\left[(n-2)^2-\frac{1}{9}\right]a_{n-2}=0 \qquad (n\geqslant 4)$$

因而

$$a_2=-\frac{1}{9}\frac{1}{2!}a_0,\ a_3=\left(1-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{3!}a_1,\ \cdots,\ a_n=\frac{(n-2)^2-\frac{1}{9}}{n(n-1)}a_{n-2}$$

即有

$$a_{2n+1}=\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(3^2-\frac{1}{9}\right)\left(5^2-\frac{1}{9}\right)\cdots\left[(2n-1)^2-\frac{1}{9}\right]\frac{1}{(2n+1)!}a_1$$

$$a_{2n}=-\frac{1}{9}\left(2^2-\frac{1}{9}\right)\left(4^2-\frac{1}{9}\right)\cdots\left[(2n-2)^2-\frac{1}{9}\right]\frac{1}{(2n)!}a_0$$

$$(n\geqslant 1)$$

由初始条件 $y(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y'(0)=\frac{1}{6}$，得

$$a_0=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad a_1=\frac{1}{6}$$

故初值问题的解为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\frac{1}{9}\cdot\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{9}\left(2^2-\frac{1}{9}\right)\frac{x^4}{4!}-\cdots\right]$$
$$+\frac{1}{6}\left[x+\left(1-\frac{1}{9}\right)\frac{x^3}{3!}+\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(3^2-\frac{1}{9}\right)\frac{x^5}{5!}+\cdots\right].$$

【351】 求微分方程 $y''+(\sin x)y=0$ 在 $x_0=0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解.

解 $p(x)=0$、$q(x)=\sin x$ 可在 $x_0=0$ 的邻域展成幂级数，故原方程具有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1}$$

的幂级数解. 将(1)及其导数代入原方程，并且注意到

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}+\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]=0$$

即

$$2a_2+(3\cdot 2a_3+a_0)x+(4\cdot 3a_4+a_1)x^2+\cdots$$

$$+\left[\sum_{\substack{i=0\\ n\geqslant 5\\ j=n-3-2i}}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}a_j+(n-1)na_n\right]x^{n-2}+\cdots=0$$

令 x 的同次幂系数为零，得

$$a_2=0,\ a_3=-\frac{1}{3!}a_0,\ a_4=-\frac{1}{3\cdot 4}a_1,\ a_5=\frac{1}{5!}a_0$$

$$a_6=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}a_1+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}a_0,\ \cdots\cdots$$

故原方程的通解为

$$y=a_0\left(1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}-\cdots\right)$$

在上式中，分别取 $a_0=1$，$a_1=0$ 和 $a_0=0$，$a_1=1$，可得原方程的两个解

$$y_1=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$

$$y_2=x-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}-\cdots$$

因为它们的朗斯基行列式

$$W(0)=\begin{vmatrix}y_1(0) & y_2(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

故 y_1，y_2在区间$[-b,b]$上线性无关. 即知，y_1，y_2 是原方程在 $x_0=0$ 邻域展开的两个线性无关的幂级数解.

【352】 求解厄米特(Hermite)方程 $y''-2xy'+\lambda y=0$ $(-\infty<x<+\infty)$，其中 λ 是给定常数.

解 $p(x)=-2x$，$q(x)=\lambda$ 可在 $x_0=0$ 的邻域展成幂级数，故原方程有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1}$$

的幂级数解. 将(1)及其导数代入原方程，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n=0$$

令 x 的同次幂系数为零，得

$$a_2=-\frac{\lambda a_0}{2},\ a_3=\frac{(2-\lambda)a_1}{3\cdot 2},\ \cdots,\ a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

因而

$$a_{2n}=-\frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)\cdots[(4n-4)-\lambda]}{(2n)!}a_0,$$

$$a_{2n+1}=\frac{(2-\lambda)(6-\lambda)\cdots(4n-2-\lambda)}{(2n+1)!}a_1\quad(n\geqslant 1)$$

于是

$$y=a_0\left[1-\frac{\lambda}{2!}x^2-\frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4-\frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6-\cdots\right]$$

$$+a_1\left[x+\frac{2-\lambda}{3!}x^3+\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5+\frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7+\cdots\right]$$

是原方程的幂级数解. 并且，当 λ 是非负的偶数时，原方程有一个多项式解. 例如，当 $\lambda=0,2,4,6$ 时，适当选取 a_0 或 a_1 时可得相应的多项式解分别为 $1,x,1-2x^2$和 $x-\frac{2}{3}x^3$.

【353】 求勒让德(Legendre)方程 $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ 在 $x_0=0$ 附近的两个线性无关的幂级数解，其中 n 是给定的常数. 这个方程的解称为勒让德函数.

解 $p(x)=\dfrac{-2x}{1-x^2}$，$q(x)=\dfrac{n(n+1)}{1-x^2}$ 可在$(-1,1)$展成

幂级数,故原方程有形如

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{1}$$

的幂级数解. 把(1)及其导数代入原方程, 得

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-2x\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$$

$$+(n+1)n\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$$

令 x 的同次幂系数相等, 得

$$2a_2+n(n+1)a_0=0,\ 3\cdot2a_3+(n-1)(n+2)a_1=0,\ \cdots,$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+(n-k)(n+k+1)a_k=0\quad(k\geqslant2)$$

于是得到递推公式

$$a_{k+2}=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k\quad(k\geqslant0)$$

因此

$$a_2=-\frac{n(n+1)}{2!}a_0,\ a_4=(-1)^2\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0,\ \cdots,$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{(n-2k+2)\cdots(n-2)n(n+1)\cdots(n+2k-1)}{(2k)!}a_0\quad(k\geqslant1)$$

$$a_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1,\ a_5=(-1)^2\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1,\ \cdots,$$

$$a_{2k+1}=(-1)^k\frac{(n-2k+1)\cdots(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{(2k+1)!}a_1\quad(k\geqslant1)$$

由此得到原方程的幂级数解

$$y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

其中

$$y_1(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\cdots$$

$$y_2(x)=x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\cdots$$

这两个级数当 $x\in(-1,1)$时都收敛. 取 $a_0=1$, $a_1=0$ 和 $a_0=0$, $a_1=1$, 得到原方程的两个解 $y_1(x)$和 $y_2(x)$, 显然它们在$(-1,1)$上是线性无关的. 并且当 n 是偶数时, $y_1(x)=P_n(x)$是一个 n 次多项式;当 n 是奇数时, $y_2(x)=P_n(x)$是一个 n 次多项式, 除了一个常数因子外, 将 $P_n(x)$写成如下统一的形式:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\ (n-k)!\ (n-2k)!}x^{n-2k}$$

其中$[\frac{n}{2}]$表示$\frac{n}{2}$的整数部分, 称为勒让德多项式.

【354】 令函数

$$G(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

则 $G(x,t)$关于 t 展开的幂级数为

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

其中 $P_n(x)$是勒让德多项式.

证 设 $u(x,t)=2xt-t^2$, 则

$$G(x,t)=(1-u)^{-\frac{1}{2}}$$

当$|u|<1$时, 因为

$$G(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}u^m,$$

$$u^m=(2xt-t^2)^m=\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^jm!\ (2x)^{m-j}}{j!\ (m-j)!}t^{m+j}$$

所以

$$G(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j(2m)!\ (2x)^{m-j}}{2^{2m}\cdot j!\ (m-j)!\ \cdot m!}t^{m+j}\qquad(1)$$

若设 $k=j$, $n=m+j$, 即 $j=k$, $m=n-k$, 则

$$0\leqslant j\leqslant m,\qquad m\geqslant 0$$

因而有

$$0\leqslant k\leqslant n-k,\qquad n-k\geqslant 0$$

即

$$0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2},\qquad n\geqslant 0$$

又因为 n, k 为整数，故

$$0\leqslant k\leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$$

由(1)式

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}\right]t^n$$

根据上一题的结果知

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n.$$

【355】 利用习题 354 中 $G(x,t)$所满足的恒等式

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial G}{\partial t}=(x-t)G \tag{1}$$

证明递推公式

$$nP_n(x)=(2n-1)xP_{n-1}(x)-(n-1)P_{n-2}(x)\quad(n\geqslant 2)$$

其中 $P_n(x)$是勒让德多项式.

证 将 $G(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$, $\dfrac{\partial G(x,t)}{\partial t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$代入(1)式中，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}-2x\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^n+\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n+1}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{n+1}$$

将上式改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n-2)P_{n-2}(x)t^{n-1}$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}(x)t^{n-1}$$

因此

$$(P_1(x) - xP_0(x)) + \sum_{n=2}^{\infty}(nP_n(x) - x(2n-1)P_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x))t^{n-1} = 0$$

由此得到

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \quad (n \geqslant 2).$$

【356】 求出勒让德方程 $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ 的另一个与 $P_n(x)$ 线性无关的解 $Q_n(x)$，并证明当 $x \to 1-0$ 时，$|Q_n(x)| \to +\infty$.

证 由习题 321 的结论，可求得原方程的与 $P_n(x)$ 线性无关的解 $Q_n(x)$，

$$Q_n(x) = P_n(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{[p_n(x)]^2} e^{-\int -\frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x} dx$$

$$上式右端 = P_n(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{[P_n(x)]^2} \cdot \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

即

$$Q_n(x) = P_n(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}\mathrm{d}x$$

因为 $P_n(1) = 1$，所以可取到 $x_0(0 < x_0 < 1)$，使得当 $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，有

$$\frac{1}{2}\leqslant P_n(x)\leqslant 2$$

因此，当 $x_0\leqslant x<1$ 时，得到

$$Q_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)2^2}=\frac{1}{16}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}-\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)$$

此不等式的右端当 $x\to 1$ 时趋于 $+\infty$，所以

$$\lim_{x\to 1-0}Q_n(x)=+\infty.$$

【357】 用广义幂级数法求解下列方程：

1) $2xy''+(1-2x)y'-y=0$;

2) $y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{4x}y=0$;

3) $2xy''+y'+xy=0$;

4) $2x^2y''-xy'+(1+x)y=0$;

5) $xy''+y=0$;

6) $xy''+y'-y=0$.

解　1) $xp(x)=x\cdot\frac{1}{2x}\cdot(1-2x)=\frac{1-2x}{2}$，$x^2q(x)=-\frac{x}{2}$ 可在 $x=0$ 的邻域展成幂级数，因此，原方程在原点邻域内具有形如

$$y=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1}$$

的广义幂级数解，并且

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_nx^{n+\rho-1} \tag{2}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2} \tag{3}$$

将(1)、(2)、(3)代入原方程，得

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2}$$

$$+(1-2x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_nx^{n+\rho-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho}=0 \quad (4)$$

令 $x^{\rho-1}$的系数为零，得

$$2\rho^2-\rho=0$$

解之得 $\rho_1=\frac{1}{2}$，$\rho_2=0$. 它们分别对应广义幂级数解

$$y_1=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

先考虑 $\rho=\frac{1}{2}$的情形，在(4)式中令 x 的同次幂系数为零，得到

$$a_1=\frac{2}{3}a_0,\ a_2=\frac{2}{5}a_1,\ \cdots,\ a_n=\frac{2}{2n+1}a_{n-1}\quad (n\geqslant3)$$

由此得到

$$a_n=\frac{2^n\cdot a_0}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\qquad (n\geqslant1)$$

从而得到原方程的一个解

$$y_1=a_0x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}x^n$$

对于 $\rho=0$ 的情形，同理可得

$$b_1=b_0,\ b_2=\frac{1}{2}b_1,\ \cdots,\ b_n=\frac{1}{n}b_{n-1}\quad (n\geqslant3)$$

由此得到

$$b_n=\frac{1}{n!}b_0\qquad (n\geqslant1)$$

从而得到原方程的另一个解

$$y_2=b_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

因此，原方程的通解为

$$y=a_0x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}x^n+b_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

即

$$y=a_0x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}x^n+b_0e^x$$

2) $xp(x)=x\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$，$x^2q(x)=x^2\cdot\frac{1}{4x}=\frac{1}{4}x$ 可在 $x=0$ 的邻域展成幂级数，因此，原方程在原点邻域内具有形如

$$y=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1}$$

的广义幂级数解. 将(1)及其导数代入原方程，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2}+\frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_nx^{n+\rho-1}$$
$$+\frac{1}{4x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho}=0 \tag{5}$$

令 $x^{\rho-2}$的系数为零，由 $a_0\neq0$ 得

$$\rho(\rho-1)+\frac{1}{2}\rho=0$$

解之得 $\rho_1=0$，$\rho_2=\frac{1}{2}$. 它们分别对应广义幂级数解

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+\frac{1}{2}}$$

先考虑 $\rho=0$ 的情形，在(5)式中令 x 的同次幂系数为零，得到

$$a_1=-\frac{1}{2}a_0,\ a_2=-\frac{1}{4\cdot3}a_1,\ \cdots,\ a_n=-\frac{1}{2n\cdot(2n-1)}a_{n-1}$$
$$(n\geqslant3)$$

由此可得

$$a_n=(-1)^n\frac{1}{(2n)!}a_0\quad(n\geqslant1)$$

从而得到原方程的一个解

$$y_1=a_0\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\cdots\right).$$

对于 $\rho=\frac{1}{2}$的情形，同理可得

$$b_1=-\frac{1}{6}b_0,\ b_2=-\frac{1}{20}b_1,\cdots,\ b_n=-\frac{b_{n-1}}{(2n+1)2n}\quad(n\geqslant3)$$

由此可得

$$b_n=(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}b_0\quad(n\geqslant1)$$

从而得到原方程的另一个解

$$y_2=b_0x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

所以，原方程的通解为

$$\begin{aligned}y=&a_0\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\cdots\right)\\&+b_0x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}+\cdots\right)\end{aligned}$$

即

$$y=a_0\cos\sqrt{x}+b_0\sin\sqrt{x}$$

3) $xp(x)=x\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$，$x^2q(x)=x^2\frac{1}{2x}x=\frac{x^2}{2}$ 可在 $x=0$ 的邻域展成幂级数，故原方程在原点邻域内有形如

$$y=x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\tag{1}$$

的广义幂级数解．将(1)及其导数代入原方程，得

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_nx^{n+\rho-1}$$

$$+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho}=0 \tag{6}$$

令 $x^{\rho-1}$的系数为零，得

$$2\rho(\rho-1)+\rho=0$$

解之得 $\rho_1=0$，$\rho_2=\frac{1}{2}$. 它们分别对应广义幂级数解

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad y_2=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

先考虑 $\rho=0$ 的情形，在(6)式中令 x 的同次幂系数为零，得到

$$a_1=0,\ a_2=-\frac{1}{6}a_0,\ \cdots,\ a_{2n-1}=0,$$

$$a_{2n}=-\frac{1}{8n^2-2n}a_{2n-2}\quad (n\geqslant 2)$$

由此可得

$$a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\frac{(-1)^na_0}{2^n\cdot n!\cdot 3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-1)}\quad (n\geqslant 1)$$

从而得到原方程的一个解

$$y_1=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!\cdot 3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-1)}x^{2n}\right)$$

对于 $\rho=\frac{1}{2}$的情形，同理可得

$$b_1=0,\ b_2=-\frac{1}{10}b_0,\ \cdots,\ b_{2n-1}=0,$$

$$b_{2n}=-\frac{1}{2n(4n+1)}b_{2n-2}\quad (n\geqslant 2)$$

由此得到

$$b_{2n-1}=0,\ b_{2n}=\frac{(-1)^nb_0}{2^n\cdot n!\cdot 5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n+1)}\quad (n\geqslant 1)$$

从而得到原方程的另一个解

$$y_2=b_0x^{\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!\cdot5\cdot9\cdot\cdots\cdot(4n+1)}x^{2n}\right)$$

所以,原方程的通解为

$$y=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot3\cdot7\cdot\cdots\cdot(4n-1)}\right)$$
$$+b_0x^{\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot5\cdot9\cdot\cdots\cdot(4n+1)}\right)$$

4) $xp(x)=x\cdot\frac{1}{2x^2}\cdot(-x)=-\frac{1}{2}$，$x^2q(x)=x^2\cdot\frac{1}{2x^2}\cdot(1+x)=\frac{1+x}{2}$ 可在 $x=0$ 的邻域展成幂级数，所以原方程在原点邻域内有形如

$$y=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1}$$

的广义幂级数解. 将(1)及其导数代入原方程，得

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2}-x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_nx^{n+\rho-1}$$
$$+(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho}=0 \tag{7}$$

令 x^{ρ} 的系数为零，得

$$2\rho(\rho-1)-\rho+1=0$$

解之得 $\rho_1=1$，$\rho_2=\frac{1}{2}$. 它们分别对应广义幂级数解

$$y_1=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad y_2=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

先考虑 $\rho=1$ 的情形，在(7)式中令 x 的同次幂系数为零，得到

$$a_1=-\frac{1}{3}a_0,\ a_2=-\frac{1}{10}a_1,\ \cdots,\ a_n=-\frac{1}{n(2n+1)}a_{n-1}$$
$$(n\geqslant3)$$

由此得到

$$a_n=\frac{(-1)^n a_0}{n!\ (2n+1)!!}\quad (n\geqslant 1)$$

从而得到原方程的一个解

$$y_1 = a_0 x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n+1)!!}\right]$$

对于 $\rho=\frac{1}{2}$ 的情形，同理可得

$$b_1=-b_0,\ b_2=-\frac{1}{6}b_1,\ \cdots,$$

$$b_n=-\frac{1}{n(2n-1)}b_{n-1}\quad (n\geqslant 3)$$

由此得到

$$b_n=\frac{(-1)^n b_0}{n!\ (2n-1)!!}\quad (n\geqslant 1)$$

从而得到原方程的另一个解

$$y_2 = b_0 x^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n-1)!!}\right]$$

所以，原方程的通解为

$$y = a_0 x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n+1)!!}\right] + b_0 x^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n-1)!!}\right]$$

5) $xp(x)=0$, $x^2q(x)=x^2\cdot\frac{1}{x}=x$ 可在 $x=0$ 的邻域展成幂级数，所以原方程在原点的邻域内有形如

$$y=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{1}$$

的广义幂级数解. 将(1)及其导数代入原方程，得

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho}=0 \tag{8}$$

令 $x^{\rho-1}$的系数为零，得

$$\rho(\rho-1)=0$$

解之得 $\rho_1=0$，$\rho_2=1$. 它们分别对应广义幂级数解

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+1}.$$

先考虑 $\rho=0$ 的情形，在(8)式中令 x 的同次幂系数为零，得到

$$a_0=0,\ a_2=-\frac{1}{2}a_1,\ \cdots,\ a_n=-\frac{1}{n(n-1)}a_{n-1}\quad (n\geqslant 3)$$

由此得到

$$a_0=0,\quad a_{n+1}=\frac{(-1)^na_1}{n!\ (n+1)!}\quad (n\geqslant 1)$$

从而得到原方程的一个解

$$y_1=a_1x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n\right].$$

对于 $\rho=1$ 的情形，同理可得

$$b_1=-\frac{1}{2}b_0,\cdots,\ b_n=\frac{-1}{n(n+1)}b_{n-1}\quad (n\geqslant 2)$$

由此得到

$$b_n=\frac{(-1)^n}{n!\ (n+1)!}b_0\quad (n\geqslant 1)$$

从而得到原方程的另一个解

$$y_2=b_0x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n\right]$$

因为 y_1，y_2在$(-\infty,+\infty)$上线性相关，故只能得到一个广义幂级数解

$$y=a_1x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n\right]$$

原方程的通解可根据习题 321 的结论得到.

6) $xp(x)=x\cdot\frac{1}{x}=1$, $x^2q(x)=x^2\cdot(-\frac{1}{x})=-x$ 可在 $x=0$ 的邻域展成幂级数，所以原方程在原点的邻域内有形如

$$y=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1}$$

的广义幂级数解. 将(1)及其导数代入原方程，得

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_nx^{n+\rho-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho}=0 \tag{9}$$

令 $x^{\rho-1}$的同次幂系数为零，得

$$\rho(\rho-1)+\rho=0$$

解之得 $\rho_1=\rho_2=0$，它对应广义幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

在(9)式中令 x 的同次幂系数为零，得到

$$a_1=a_0,\ a_2=\frac{1}{4}a_1,\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n^2}a_{n-1}\quad(n\geqslant 3)$$

由此得到

$$a_n=\frac{1}{(n!)^2}a_0\quad(n\geqslant 1)$$

从而得到原方程的一个广义幂级数解

$$y=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}x^n\right]$$

原方程的通解可根据习题 321 的结论得到.

【358】 求贝塞尔(Bessel)方程 $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ 在 $x=0$ 附近的广义幂级数解，其中 n 为常数.

解 $xp(x)=x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x=1$，$x^2q(x)=x^2\cdot\frac{x^2-n^2}{x^2}=x^2-n^2$可在 $x=0$ 处展成幂级数，故原方程有形如

$$y=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{1}$$

的广义幂级数解. 将(1)及其导数代入原方程，得

$$x^2\sum_{k=2}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)a_kx^{\rho+k-2}+x\sum_{k=1}^{\infty}(\rho+k)a_kx^{\rho+k-1}$$
$$+(x^2-n^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\rho}=0$$

令 x^ρ 的系数为零得

$$(\rho^2-n^2)a_0=0$$

由 $a_0\neq0$ 得 $\rho_1=n$，$\rho_2=-n$.

先考虑 $\rho=n$ 的情形，此时原方程有形如

$$y_1=x^n\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{2}$$

的特解. 令 x 的同次幂系数为零，得到

$$[(n+1)^2-n^2]a_1=0$$
$$[(n+2)^2-n^2]a_2+a_0=0$$
$$[(n+k)^2-n^2]a_k+a_{k-2}=0\quad(k\geqslant3)$$

由此得

$$a_1=0,\ a_2=-\frac{a_0}{4(n+1)},\ \cdots,\ a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}\quad(k\geqslant3)$$

即有

$$\left.\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{-a_{2k-1}}{(2k+1)(2n+2k+1)} \\ a_{2k} &= \frac{-a_{2k-2}}{2k(2n+2k)} \end{aligned}\right. \quad (k \geqslant 1)$$

从而求得

$$a_{2k-1} = 0 \qquad (k \geqslant 1)$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(n+1)}, \cdots,$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}k!\ (n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \quad (k \geqslant 2)$$

不妨令

$$a_0 = \frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$$

其中 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\,(x>0)$，显然 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

代回(2)式得到特解 y_1，即有

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ (n+k)\cdots(n+1)\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

注意到 Γ 函数的性质，则有

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{3}$$

广义幂级数(3)在$(-\infty, +\infty)$上都是收敛的. 把(3)式右端称为第一类 n 阶贝塞尔函数，记作 $J_n(x)$.

$\rho = -n$ 时，对应广义幂级数解

$$y_2 = x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2$'$}$$

将(2′)式及其导数代入原方程，令 x 的同次幂系数为零，同理可得

$$a_{2k-1}=0,$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!\ (-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)}\quad (k\geqslant 1)$$

不妨令

$$a_0=\frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$$

得到

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\triangleq J_{-n}(x)$$

$J_{-n}(x)$ 称为第一类 $-n$ 阶贝塞尔函数.

当 $n\neq$ 非负整数时，$J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 是原方程的线性无关的解，于是原方程的通解为

$$y=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x)$$

当 $n=$ 非负整数时，只能求出特解 $J_n(x)$，根据习题 321 的结论，原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= C_1J_n(x)+C_2J_n(x)\int\frac{1}{J_n^2(x)}e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}dx \\ &= J_n(x)\left[C_1+C_2\int\frac{\mathrm{d}x}{xJ_n^2(x)}\right]. \end{aligned}$$

【359】 试证：

1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$；

2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x)$.

其中 $J_n(x)$ 为第一类 n 阶贝塞尔函数.

证 只证 2)(1)同理可证). 利用 Γ 函数的性质，逐项求导，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^nJ_n(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(n+k+1)}(2k+2n)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2n-1}\frac{1}{2}$$

$$= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1}$$

$$= x^n J_{n-1}(x).$$

【360】 证明半整数阶的贝塞尔函数为

1) $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$;

2) $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$;

3) $J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}^n}{(\mathrm{d}x^2)^n}\dfrac{\sin x}{x}$;

4) $J_{-n-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}^n}{(\mathrm{d}x^2)^n}\dfrac{\cos x}{x}$,　$n=0,1,2,\cdots$.

证　由 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ 知

1)　$$J_{\frac{1}{2}}(x)= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ (k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

2)　$$J_{-\frac{1}{2}}(x)= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(k+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

3) $$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(n+k+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ (n+k+\frac{1}{2})(n+k-\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{n+\frac{1}{2}}(n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)}{\sqrt{\pi}(2n+2k+1)!}x^{n+\frac{1}{2}+2k} \tag{1}$$

将

$$\frac{\sin x}{x}$$

展成幂级数，并且令 $x^2=t$，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}t^{n+k}}{(2n+2k+1)!}$$

将它微分 n 次，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}(n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)}{(2n+2k+1)!}t^k$$

把它与(1)比较，有

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{(\mathrm{d}x^2)^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

4) 同 3)可证.

【361】 求方程 $t^2\ddot{x}+t\dot{x}+(t^2-\frac{1}{4})x=0$ 的通解.

解 本题即习题 330 的 1). 这是 $n=\frac{1}{2}$ 时的贝塞尔方程，

因此所求通解为

$$x=C_1J_{\frac{1}{2}}(t)+C_2J_{-\frac{1}{2}}(t)$$

由上题1)、2)，或写为

$$x=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(C_1\sin x+C_2\cos x).$$

【362】 求方程 $x^2y''+xy'+(4x^2-\frac{9}{25})y=0$ 的通解.

解 作变换

$$t=2x$$

则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(2\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=4\frac{d^2y}{dt^2}$$

将上述关系代入原方程,得

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left(t^2-\frac{9}{25}\right)y=0 \qquad (1)$$

这是 $n=\frac{3}{5}$ 时的贝塞尔方程. 根据习题358的结论，方程(1)的通解为

$$y=C_1J_{\frac{3}{5}}(t)+C_2J_{-\frac{3}{5}}(t)$$

将 $t=2x$ 代回上式，得到原方程的通解为

$$y=C_1J_{\frac{3}{5}}(2x)+C_2J_{-\frac{3}{5}}(2x).$$

【363】 用贝塞尔函数表达微分方程 $y''+a^2xy=0$ 的通解，其中 $a\neq0$.

解 作变换

$$x=\left(\frac{3}{2a}u\right)^{\frac{2}{3}},\quad y=x^{\frac{1}{2}}v$$

则

$$u=\frac{2a}{3}x^{\frac{3}{2}},\quad v=yx^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=ax^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=ax^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \tag{2}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y=ax^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$$

上式两端同乘以 x，由(1)式得

$$x^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{2}u\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\frac{1}{2}v \tag{3}$$

上式两端再对 x 求导得

$$x^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{3}{2}u\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\frac{1}{2}v\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$=\left[\frac{3}{2}\left(u\ \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right]ax^{\frac{1}{2}}$$

两端乘以 x，注意到(1)及(3)式，整理得

$$x^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}u\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\frac{1}{2}v\right)=\frac{3}{2}u\left(\frac{3}{2}u\ \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+2\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2a}{3u}\left(\frac{9}{4}u^2\ \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+\frac{9}{4}u\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}-\frac{1}{4}v\right)$$

并且

$$xy=\left(\frac{3}{2a}u\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2a}u\right)^{\frac{1}{3}}v=\frac{3}{2a}uv$$

将上述关系代入原方程得

$$\frac{2a}{3u}\left(\frac{9}{4}u^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+\frac{9}{4}u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}-\frac{1}{4}v\right)+a^2\frac{3}{2a}uv=0$$

整理后即得

$$u^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\left(u^2-\frac{1}{9}\right)v=0 \tag{4}$$

这是 $n=\frac{1}{3}$ 时的贝塞尔方程. 根据习题 358 的结论,方程(4)的通解为

$$v=C_1J_{\frac{1}{3}}(u)+C_2J_{-\frac{1}{3}}(u)$$

代入原变量，得到原方程的通解为

$$y=C_1x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}\right)+C_2x^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}\right).$$

【364】 求方程 $y''+xy=0$ 的通解.

解 该方程是习题 363 $a=1$ 时的情况，故所求通解为

$$y=C_1x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2x^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right).$$

【365】 求超几何方程 $x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$ 在 $x=0$ 附近的广义幂级数解，其中 α,β,γ 是给定的常数.

解 $xp(x)=x\dfrac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}=\dfrac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{1-x}$, $x^2q(x)=\dfrac{\alpha\beta x}{x-1}$ 可在 $x=0$ 邻域展成幂级数，故原方程有形如

$$y=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1}$$

的广义幂级数解. 把(1)及其导数代入原方程，得

$$x(1-x)\sum_{n=2}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\sum_{n=1}^{\infty}(n+\rho)a_nx^{n+\rho-1}-\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho}=0$$

令 $x^{\rho-1}$的系数为零得

$$\rho(\rho+\gamma-1)a_0=0$$

由 $a_0\neq0$ 得，$\rho_1=0$，$\rho_2=1-\gamma$.

先考虑 $\rho=0$ 的情形，此时原方程有形如

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{2}$$

的特解. 令 x 的同次幂为零，得到

$$a_1=\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}a_0,\ a_2=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}a_1,\ \cdots,$$

$$a_n=\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}a_{n-1}\quad(n\geqslant3)$$

由此得到递推公式

$$a_n=\frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdots\alpha(\beta+n-1)(\beta+n-2)\cdots\beta}{n!\ (\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\cdots\gamma}a_0$$

$$(n\geqslant1)$$

取 $a_0=1$，得到原方程的一个广义幂级数解

$$y_1=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n \tag{3}$$

它在 $|x|<1$ 内收敛，级数(3)称为超几何级数，记为 $F(\alpha,\beta,\gamma;\ x)$，即

$$F(\alpha,\beta,\gamma;\ x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\ \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

$$(\gamma\neq0,-1,-2,\cdots,)$$

若在原方程中，$\alpha=1$，$\beta=\gamma$，则相应的级数解(3)变为几何级

数 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$.

$\rho=1-\gamma$ 时，对应广义幂级数解

$$y_2=x^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{2)'$$

将(2)′及其导数代入原方程，令 x 的同次幂系数为零，同理可得

$$a_n=\frac{(\alpha-\gamma+n)(\beta-\gamma+n)}{n(1-\gamma+n)}a_{n-1}\quad(n\geqslant1)$$

由此得到

$$a_n=\frac{(\alpha-\gamma+n)\cdots(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+n)\cdots(\beta-\gamma+1)}{n!\ (1-\gamma+n)\cdots(1-\gamma+1)}a_0\quad(n\geqslant1)$$

取 $a_0=1$,得到原方程的一个广义幂级数解

$$y_2=x^{1-\gamma}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha-\gamma+1)\cdots(\alpha-\gamma+n)(\beta-\gamma+1)\cdots(\beta-\gamma+n)}{n!\ (2-\gamma)(3-\gamma)\cdots(n+1-\gamma)}x^n\right]$$
$$=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;\ x).\ (\gamma\neq2,3,\cdots)$$

当 $\gamma=1$ 时，$y_1=y_2=F(\alpha,\beta,1;\ x)$

由上面的讨论可知，当 γ 不等于整数时，y_1,y_2有意义且在$(-1,1)$上线性无关，故此时原方程在 $x=0$ 附近的通解为

$$y=C_1F(\alpha,\beta,\gamma;\ x)+C_2x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;\ x)$$

当 γ 等于整数时，只求得了一个解 y_1 或 y_2，根据习题 321 的结论，可以求得另一个与其线性无关的解.

【366】 利用超几何级数表示方程 $4x(1-x)y''+2(1-4x)y'-y=0$ 的通解.

解　该方程可改写成

$$x(1-x)y''+\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)x\right]y'-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y=0$$

这是 $\gamma=\frac{1}{2}$，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{2}$ 时的超几何方程，根据习题 365 的结论，原方程的通解为

$$y=C_1F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};\ x\right)+C_2x^{\frac{1}{2}}F\left(1,1,\frac{3}{2};x\right).$$

【367】 求方程 $2x^2(x-1)y''+3x^2y'-2a(1-a)y=0$ 的通解.

解 作变换

$$x=\frac{1}{t}$$

则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-t^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=t^4\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}$$

因此，原方程化为

$$2t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+(1-4t)\frac{dy}{dt}-2a(1-a)y=0$$

改写为

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+\left\{\frac{1}{2}-[a+(1-a)+1]t\right\}\frac{dy}{dt}-a(1-a)y=0 \quad (1)$$

这是 $\gamma=\frac{1}{2}$，$\alpha=a$，$\beta=1-a$ 时的超几何方程，故根据习题 365 的结论，方程(1)的通解为

$$y=C_1F\left(a,1-a,\frac{1}{2};\ t\right)+C_2t^{\frac{1}{2}}F\left(a+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-a,\frac{3}{2};\ t\right)$$

将 $t=\frac{1}{x}$ 代入上式，得到原方程的通解为

$$y=C_1F\left(a,1-a,\frac{1}{2};\ \frac{1}{x}\right)+C_2x^{-\frac{1}{2}}F\left(a+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-a,\frac{3}{2};\ \frac{1}{x}\right).$$

【368】 证明：如下形状的微分方程

$$(x-x_1)(x-x_2)y''+(Cx+D)y'+Ey=0 \tag{1}$$

（其中 C,D,E,x_1,x_2是已知常数），在 $x=x_1$与 $x=x_2$附近的解可以用超几何级数表示.

证 作变换

$$x=x_1+t(x_2-x_1)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x_2-x_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{x_2-x_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x_2-x_1)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

方程(1)化为超几何方程

$$t(1-t)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{Cx_1+D}{x_1-x_2}-Ct\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-Ey=0 \tag{2}$$

其中 α,β,γ 可以由下面的代数方程组

$$\begin{cases}\dfrac{Cx_1+D}{x_1-x_2}=\gamma\\ C=\alpha+\beta+1\\ E=\alpha\beta\end{cases}$$

确定. 方程(2)在 $t=0$ 与 $t=1$ 附近的解可用超几何级数表示，从而方程(1)在 $x=x_1$与 $x=x_2$附近的解可用超几何级数表示.

【369】 证明：勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \tag{1}$$

在 $x=1$ 与 $x=-1$ 附近的解都可用超几何级数表示.

证 直接利用上一题的结果，这里 $x_1=1$，$x_2=-1$，$C=$

2，$D=0$，$E=-n(n+1)$. 经变换

$$x=1-2t$$

方程(1)化为超几何方程

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+(1-2t)\frac{dy}{dt}+n(n+1)y=0$$

其中 $\gamma=1$，$\alpha=n+1$，$\beta=-n$. 因此，方程(1)在 $x=1$ 与 $x=-1$ 附近的解可用超几何级数表示.

§4.6 应用实例

题 解

【370】 一质量为 m 千克的质点在与位移成正比的外力作用下运动，初速 $v_0=1$(米/秒). 设介质的阻力与质点的速度成正比，试求质点的运动规律.

解 设外力与位移的比例系数为 k_1，阻力与质点速度的比例系数为 k_2，在时刻 t 的位移为 $x(t)$. 根据牛顿第二定律列方程

$$k_1x-k_2\dot{x}=m\ddot{x}$$

初始条件为

$$x(0)=0,\qquad \dot{x}(0)=1$$

即解初值问题

$$\begin{cases}m\ddot{x}+k_2\dot{x}-k_1x=0\\ x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1\end{cases}$$

解得

$$x=C_1\exp\left(-\frac{k_2}{2m}+\frac{\sqrt{k_2^2+4mk_1}}{2m}\right)t$$

$$+C_2\exp\left(-\frac{k_2}{2m}-\frac{\sqrt{k_2^2+4mk_1}}{2m}\right)t \tag{1}$$

再由初始条件，得

$$-C_2=C_1=\frac{m}{\sqrt{k_2^2+4mk_1}}$$

代入(1)式，即得质点的运动规律为

$$x=\frac{m}{\sqrt{k_2^2+4mk_1}}\exp\left(-\frac{k_2}{2m}+\frac{\sqrt{k_2^2+4mk_1}}{2m}\right)t$$

$$-\frac{m}{\sqrt{k_2^2+4mk_1}}\exp\left(-\frac{k_2}{2m}-\frac{\sqrt{k_2^2+4mk_1}}{2m}\right)t.$$

【371】 一重量为 P 的火车在机车牵引力 F 的作用下，沿水平道路行进，在行进中受到阻力 $W=a+bv$，其中 a 和 b 是常数，v 是火车的速度，试求开车后 t 时火车走过的路程.

解 设开车后 t 时火车走过的路程为 s，由题设，得

$$F-(a+bv)=\frac{P}{g}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{bg}{P}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{g(F-a)}{P} \tag{1}$$

并且

$$s\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v\Big|_{t=0}=0 \tag{2}$$

易求得(1)的通解为

$$s=C_1+C_2e^{-\frac{bg}{P}t}+\frac{(F-a)}{b}t$$

将初始条件(2)代入，得

$$s=\frac{(F-a)t}{b}-\frac{P(F-a)}{b^2g}(1-e^{-\frac{bg}{P}t}).$$

【372】 质量为 1 千克的质点被一力从某中心沿直线推开，该力的大小与这个中心到质点的距离成正比(比例常数为 4)，介质阻力与运动速度成正比(比例常数为 3). 在开始运动时，质点与中心的距离为 1 米，速度为 0. 求质点的运动方程.

解 设质点在时刻 t 的位移为 s，由题设得

$$4s-3\frac{ds}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2s}{dt^2}+3\frac{ds}{dt}-4s=0$$

及满足初始条件

$$s\Big|_{t=0}=1,\qquad \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=0$$

解得

$$s=\frac{1}{5}(4e^t+e^{-4t}).$$

【373】 一质量为 m 的质点由静止开始沉入液体中，当下沉时，液体的反作用与下沉的速度成正比，求此质点的运动规律.

解 设液体的反作用与下沉的速度的比例常数为 k，在时刻 t 下沉的位移为 s，则

$$m\ddot{s}=mg-k\dot{s}$$

并且有

$$s\Big|_{t=0}=0,\qquad \dot{s}\Big|_{t=0}=0$$

解得

$$s=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$$

【374】 一重为 $P=4$ 牛顿的物体挂在弹簧下端，它使弹簧的长度增大 1 厘米．假定弹簧的上端有一转动机产生铅直调合振动 $y=2\sin30t$（厘米），并在初始时刻 $t=0$ 时，重物处于静止状态，试求该重物的运动规律．

解　设 $x(t)$为 t 时刻物体的位移，k 为弹簧的弹性系数．由牛顿第二定律，得到方程

$$m\ddot{x}=2k\sin30t-kx \tag{1}$$

根据题设，$m=\frac{4000}{g}$，$k=4000$，从而(1)式为

$$\frac{4000}{g}\ddot{x}+4000x=8000\sin30t$$

化简为

$$\ddot{x}+gx=2g\sin30t$$

并且

$$x\Big|_{t=0}=0,\qquad \dot{x}\Big|_{t=0}=0$$

解得

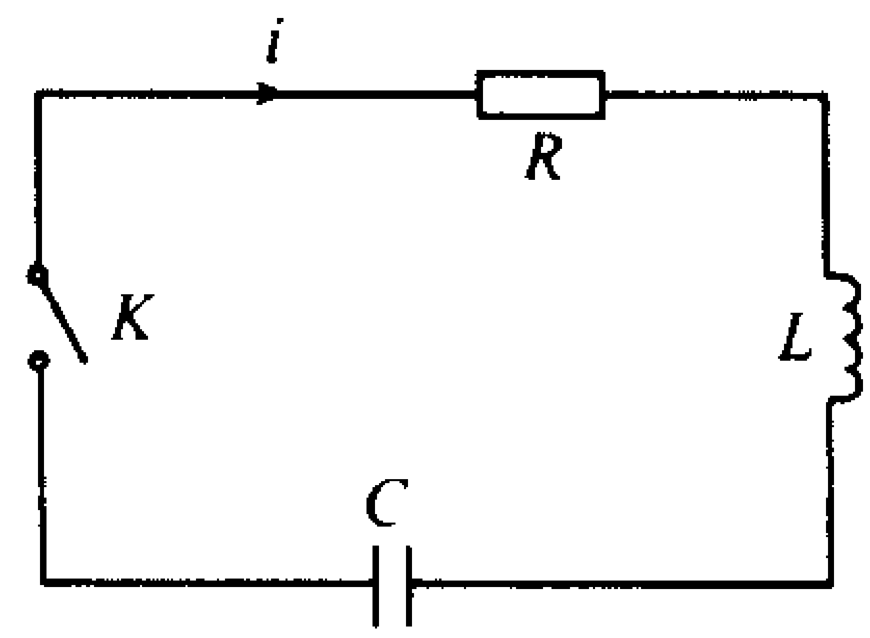
$$x=\frac{2g\sin30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t}{g-900}.$$

【375】 一电阻 $R=250$ 欧，电感 $L=1$ 亨，电容 $C=10^{-4}$ 法的串联电路，外加直流电压 $E=100$ 伏，当时间 $t=0$ 时，电流 $i=0$，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=100$ 安/秒，求电路中电流与时间的函数关系．

解　如电路图所示．根据基尔霍夫第二定律，得到关于电

流 $i(t)$所满足的方程

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0 \quad (1)$$



(第 375 题图)

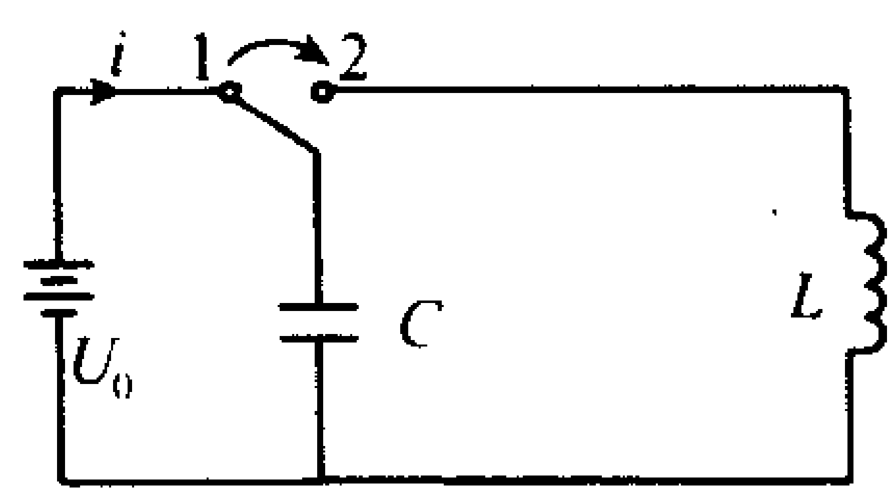
并且

$$i\Big|_{t=0}=0,\qquad \frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=100 \ (2)$$

将 $L=1$ 亨，$R=250$ 欧，$C=10^{-4}$
法代入(1)中，得到初值问题(1)、(2)的解为

$$i(t)=\frac{2}{3}(e^{-50t}-e^{-200t}).$$

【376】 如 LC 电路图中所示，先将开关拨到“1”处，对电容器充电到电源电压 U_0，然后再将开关拨到“2”处. 如果 $C=2\times10^{-9}$法，$L=5\times10^{-4}$亨，求此 LC 电路中的电流$i(t)$和电容器两端的电压 $U_C(t)$.



(第 376 题图)

解 根据基尔霍夫定律，得到关于电流 i 的方程

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}i=0$$

并且

$$i\Big|_{t=0}=0,\qquad \frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{U_0}{L}$$

解得

$$i(t)=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t$$

将 $C=2\times10^{-9}$法，$L=5\times10^{-4}$亨代入上式，得到

$$i(t)=\frac{U_0}{5\times10^2}\sin10^6t$$

再根据基尔霍夫定律，得到关于电压 U_C 的方程

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2}+U_C=0$$

并且

$$U_C\Big|_{t=0}=U_0,\qquad \frac{dU_C}{dt}\Big|_{t=0}=0$$

解得

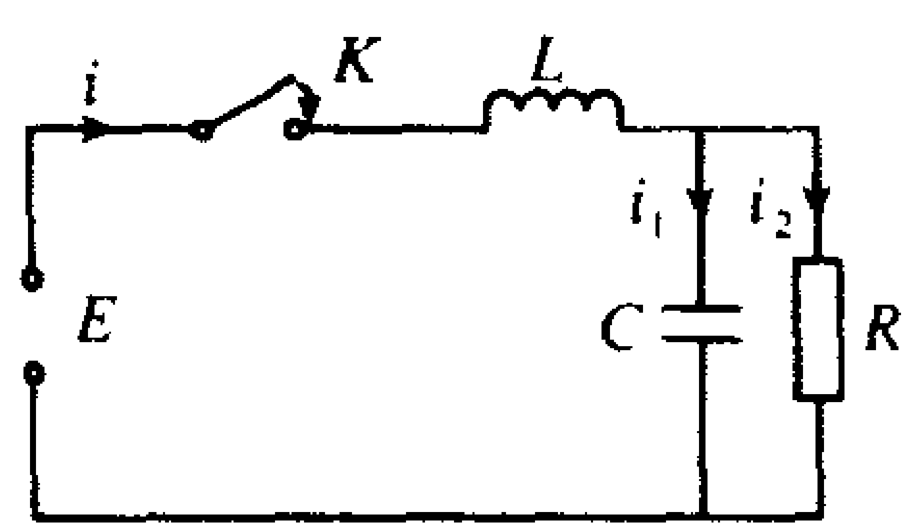
$$U_C(t)=U_0\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t$$

将 $C=2\times10^{-9}$法，$L=5\times10^{-4}$亨代入上式，得到

$$U_C(t)=U_0\cos10^6t.$$

【377】 有一 LRC 电路，其中 RC 并联，再与 L 及直流电源 E 串联，试求通过电感 L 的电流 $i(t)$，假定在 $t=0$ 时，$i(0)=0$.

解 如电路图所示，电流方向按回路中所示方向标定. 考虑回路 $ELCE$、CRC 的电压，根据基尔霍夫定律，得



（第 377 题图）

$$\begin{cases}L\dfrac{di}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t(i-i_1)d\tau=E & (1)\\[2ex] Ri_1-\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t(i-i_1)d\tau=0 & (2)\end{cases}$$

两式相加，得

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri_1=E \tag{3}$$

微分(1)式，得

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{C}i-\frac{1}{C}i_1=0$$

由此解得

$$i_1=CL\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+i \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式中，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{CR}\cdot\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{CL}i=\frac{E}{CLR} \tag{5}$$

方程(5)对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{1}{CR}\lambda+\frac{1}{CL}=0$$

特征根 $\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\beta$，其中

$$\alpha=\frac{1}{2CR},\qquad \beta=\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{CL}}$$

ⅰ）若 $\alpha^2>\frac{1}{CL}$，此时(5)的通解为

$$i=\frac{E}{R}+e^{-\alpha t}(C_1\mathrm{ch}\beta t+C_2\mathrm{sh}\beta t)$$

由题设知，$t=0$ 时，$i=0$，从而 $i_1=0$，由(3)式，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{E}{L}$，故

$$C_1=-\frac{E}{R},\qquad C_2=\frac{E}{R\beta}\left(\frac{R}{L}-\alpha\right)$$

所以

$$i=\frac{E}{R}\left\{1-e^{-\alpha t}\left[\mathrm{ch}\beta t+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{R}{L\beta}\right)\mathrm{sh}\beta t\right]\right\}$$

ⅱ）若 $\alpha^2<\frac{1}{CL}$，同理可求得

$$i=\frac{E}{R}\left\{1-e^{-\alpha t}\left[\cos\omega t+\left(\frac{\alpha}{\omega}-\frac{R}{L\omega}\right)\sin\omega t\right]\right\}$$

其中 $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}$.

第五章　常微分方程组

§5.1　一阶微分方程组

提　　要

定义 1　含有个 n 未知函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及其一阶导数的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1, \cdots, n) \tag{1}$$

其中 $f_i(i=1,\cdots,n)$ 是定义在 $n+1$ 维空间 $(t, x_1, \cdots, x_n)$ 的某区域 D 内的已知函数，t 是自变量，称为一阶微分方程组的标准形式.

定义 2　若在区间 $[a, b]$ 内定义的 n 个连续可微函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 能使得在 $[a, b]$ 上有恒等式

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} \equiv f_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \quad (i=1, \cdots, n)$$

则称函数组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为方程组(1)在区间 $[a, b]$ 的一个解.

定义 3　含有 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \cdots, C_n) \end{cases}$$

称为(1)的通解，如果通解满足方程组

$$\begin{cases}\Phi_1(t;\ x_1,x_2,\cdots,x_n;\ C_1,C_2,\cdots,C_n)=0\\ \Phi_2(t;\ x_1,x_2,\cdots,x_n;\ C_1,C_2,\cdots,C_n)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Phi_n(t;\ x_1,x_2,\cdots,x_n;\ C_1,C_2,\cdots,C_n)=0\end{cases}\tag{2}$$

则称(2)为(1)的通积分(或隐式解).

定义 4　求满足方程组(1)及初始值条件

$$x_1(t_0)=x_{10},\cdots,x_n(t_0)=x_{n0}\tag{3}$$

的解的问题称为一阶方程组的初值问题.

题　　解

将下列方程式(组)化成一阶微分方程组(习题 378～习题 381)

【378】　$\ddot{x}+f(t)\dot{x}+g(t)=0$

解　令$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=y$，那么$\ddot{x}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dy}{dt}$. 因此，原方程可化为形如

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=-f(t)y-g(t)\end{cases}$$

的一阶微分方程组.

【379】　$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$

解　令$\frac{dx}{dt}=y$，那么$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}$.

因此，原方程可化为形如

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{c}{m}y-\dfrac{k}{m}x+\dfrac{1}{m}f(t)\end{cases}$$

的一阶微分方程组.

【380】 $y'''+a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y=0$

解 令 $y=y_0$，$y'=\dfrac{dy_0}{dt}=y_1$，那么还可以令

$$y''=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)=\frac{dy_1}{dt}=y_2$$

因此，原方程可化为形如

$$\begin{cases}\dfrac{dy_0}{dt}=y_1\\[2ex]\dfrac{dy_1}{dt}=y_2\\[2ex]\dfrac{dy_2}{dt}=-a_1(x)y_2-a_2(x)y_1-a_3(x)y_0\end{cases}$$

的一阶微分方程组.

【381】 $$\begin{cases}\dfrac{d^2y_1}{dx^2}=a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3\\[2ex]\dfrac{d^2y_2}{dx^2}=a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3\\[2ex]\dfrac{d^2y_3}{dx^2}=a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3\end{cases}$$

解 令 $y_1=z_1$，$y_2=z_3$，$y_3=z_5$以及 $\dfrac{dy_1}{dx}=z_2$，$\dfrac{dy_2}{dx}=z_4$，$\dfrac{dy_3}{dx}=z_6$. 那么相应的有

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{dz_2}{dx},\quad \frac{d^2y_2}{dx^2}=\frac{dz_4}{dx},\quad \frac{d^2y_3}{dx^2}=\frac{dz_6}{dx}$$

于是，原二阶微分方程组可化为如下形式的一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dz_1}{dx}=z_2\\ \dfrac{dz_2}{dx}=a_1z_1+b_1z_3+c_1z_5\\ \dfrac{dz_3}{dx}=z_4\\ \dfrac{dz_4}{dx}=a_2z_1+b_2z_3+c_2z_5\\ \dfrac{dz_5}{dx}=z_6\\ \dfrac{dz_6}{dx}=a_3z_1+b_3z_3+c_3z_5.\end{cases}$$

【382】 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=p(t)x+q(t)y & (1)\\ \dfrac{dy}{dt}=q(t)x+p(t)y & (2)\end{cases}$$

其中 $p(t)$，$q(t)$在$[a,b]$上连续.

解　将方程组作变换. 由(1)+(2)得

$$\frac{d(x+y)}{dt}=[p(t)+q(t)](x+y) \tag{3}$$

由(1)−(2)得

$$\frac{d(x-y)}{dt}=[p(t)-q(t)](x-y) \tag{4}$$

则原方程组变为

$$\begin{cases}\dfrac{d(x+y)}{dt}=[p(t)+q(t)](x+y) & (3)\\ \dfrac{d(x-y)}{dt}=[p(t)-q(t)](x-y) & (4)\end{cases}$$

由初等积分法可得

$$\begin{cases}x+y=C_1e^{\int[p(t)+q(t)]dt} & (5)\\ x-y=C_2e^{\int[p(t)-q(t)]dt} & (6)\end{cases}$$

解上述代数方程组得原方程组的通解为

$$x=\overline{C}_1e^{\int[p(t)+q(t)]dt}+\overline{C}_2e^{\int[p(t)-q(t)]dt}$$

$$y=\overline{C}_1e^{\int[p(t)+q(t)]dt}-\overline{C}_2e^{\int[p(t)-q(t)]dt}$$

这里 C_1，C_2 为任意常数，并且 $\overline{C}_1=\dfrac{C_1}{2}$，$\overline{C}_2=\dfrac{C_2}{2}$.

【383】 求解下列方程组

1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda_1x\\ \dfrac{dy}{dt}=\lambda_2y\end{cases}$

2) $\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=-r(r^2-1)\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda x\\ \dfrac{dy}{dt}=x+\lambda y\end{cases}$

解 1) 由第一个方程可解得 $x=C_1e^{\lambda_1t}$，由第二个方程可解得 $y=C_2e^{\lambda_2t}$. 所以，原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

其中 C_1，C_2 为任意常数(注：通解中的英文字母 C_i 用来表示任意常数，以后不再注明).

2）由第一个方程得

$$r^2 = \frac{C_1 e^{2t}}{C_1 e^{2t} + 1}, \quad C_1 = \frac{r_0^2}{1 - r_0^2}, \quad r_0 = r(0)$$

由第二个方程得

$$\theta = t + C_2, \qquad C_2 = \theta(0)$$

所以方程组的通解为

$$\begin{cases} r^2 = \dfrac{C_1 e^{2t}}{C_1 e^{2t} + 1} \\ \theta = t + C_2 \end{cases}$$

3）由第一个方程可得，$x = C_1 e^{\lambda t}$ 将其代入第二个方程并解这个非齐次方程得

$$y = C_1 t e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}$$

因此，方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\lambda t} \\ y = C_1 t e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

【384】 求出齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Y}$$

的通解，$\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2)^T$，其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 分别为

1）$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$

2) $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

3) $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

解 1) 由方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t}y_1\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t}y_2\end{cases}$$

利用初等积分法易知其通解为

$$\begin{cases}y_1=C_1t\\ y_2=C_2t\end{cases}$$

2) $$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2 & (1)\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=-y_1 & (2)\end{cases}$$

由(1)，(2)可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}+y_1=0 \tag{3}$$

易求解(3)得

$$y_1=C_1\cos t+C_2\sin t \tag{4}$$

代入(2)式得

$$y_2=C_1\sin t-C_2\cos t \tag{5}$$

(4)，(5)为原方程组的通解.

3)　由
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_3 & (1)\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=y_2 & (2)\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=y_1 & (3)\end{cases}$$

的(2)可得 $y_2=C_2e^t$，(1)和(3)组成方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_3 & (4)\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=y_1 & (3)\end{cases}$$

(1) - (3)得 $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=y_3-y_1$，解之得

$$y_1-y_3=C_1'e^{-t} \tag{4}$$

(1) + (3)得，$\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=y_3+y_1$，解之得

$$y_1+y_3=C_3'e^t \tag{5}$$

由(4)与(5)可解得

$$y_1=\frac{1}{2}(C_1'e^{-t}+C_3'e^t)$$

$$y_3=\frac{1}{2}(C_1'e^{-t}-C_3'e^t)$$

因此，原方程组的通解为

$$\begin{cases}y_1=C_1e^{-t}+C_3e^t\\ y_2=C_2e^t\\ y_3=C_1e^{-t}-C_3e^t\end{cases}$$

这里 $C_1=\dfrac{1}{2}C_1'$，$C_3=\dfrac{1}{2}C_3'$.

§5.2 线性微分方程组的一般概念及理论

提 要

定义 1 如果微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(i=1,\cdots,n)$$

中，函数 $f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，是线性的，即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)+f_n(t)\end{cases}\tag{1}$$

则称这种微分方程组为线性微分方程组，简称为线性方程组．(1)即为线性方程组的标准形式．若引进 $n\times n$ 矩阵函数

$$\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

及 n 维列向量函数

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\quad 与\quad \boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$$

那么(1)就可以写成向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(t)$$

其中，向量函数(矩阵函数)的导数等于各分量函数的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}\tag{2}$$

定义 2　在方程组(2)中，若 $\boldsymbol{F}(t)\equiv 0\ (t\in[a,b])$，则方程组(2)变成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}\tag{3}$$

我们把(3)称为齐次线性方程组. 若 $\boldsymbol{F}(t)\not\equiv 0\ (t\in[a,b])$，则称(2)为非齐次线性方程组，而且称(3)为(2)的对应的齐次方程组.

定理 1　如果 $\boldsymbol{A}(t)$及 $\boldsymbol{F}(t)$在区间$[a,b]$上连续(即矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t)$或向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$的每个元素都在区间上连续)，则对于$[a,b]$上的任一 t_0 以及任意给定的 x_0，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \qquad\qquad t_0\in[a,b]\end{cases}\tag{4}$$

在区间$[a,b]$内存在惟一解.

定理 2　设 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$是齐次线性方程组(3)的 m 个解，则

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_m\boldsymbol{x}_m(t)\tag{5}$$

也是(3)的解，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是任意常数. 换句话说，齐

次线性方程组(3)的任何有限个解的线性组合仍为(3)的解.

定义 3 设 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$ (6)

是 m 个定义在区间$[a,b]$上的 n 维向量函数，如果存在 m 个不全为零的常数$C_1,C_2,\cdots,C_m$，使得

$$C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_m\boldsymbol{x}_m(t)\equiv 0 \tag{7}$$

在区间$[a,b]$上成立，则称这 m 个向量函数组(6)在区间$[a,b]$上线性相关，否则称(6)在区间$[a,b]$上线性无关.

定义 4 设 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是 n 个向量函数，以 $\boldsymbol{x}_i(t)$作为第 i 列($i=1,\cdots,n$)所构成的矩阵记为

$$\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$$

我们将行列式 $\det\boldsymbol{X}(t)$称为向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$的朗斯基行列式，记为

$$W(t)=\det\boldsymbol{X}(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{8}$$

定理 3 如果向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t) \tag{9}$$

在区间$[a,b]$上线性相关，则它们的朗斯基行列式 $W(t)$在$[a,b]$上恒等于零.

推论 1 如果向量函数组(9)的朗斯基行列式 $W(t)$在区间$[a,b]$上的某一点 t_0 处不等于零，即 $W(t_0)\neq 0$，则向量函数组(9)在$[a,b]$上就线性无关.

推论 2 方程组(3)的 n 个解在其定义区间$[a,b]$上线性无关的充要条件是它们的朗斯基行列式 $W(t)$在$[a,b]$上处处不为零.

定理 4　设向量函数组(9)是齐次线性方程组(3)的 n 个线性无关解，C_1，C_2，…，C_n 是 n 个任意常数，则

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_n\boldsymbol{x}_n(t) \tag{10}$$

是方程组(3)的通解，且对方程组(3)的任一解必存在常数 C_1，…，C_n 可表为(10)的形式.

定义 5　若 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$，是齐次线性方程组(3)的 n 个线性无关解，那么称 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$，是(3)的一个基本解组，并称矩阵

$$(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)) \tag{11}$$

为方程组(3)的基本解矩阵，简称为基解矩阵.

定理 5　齐次线性方程组(3)存在并且至多存在 n 个线性无关的解.

定理 6　若 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$，是齐次线性方程组(3)的 n 个解，则这 n 个解的朗斯基行列式与方程组(3)的系数有如下关系式

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]\mathrm{d}t} \tag{12}$$

这个关系式称为刘维尔公式.

定理 7　如果 $\boldsymbol{x}^*$ 是非齐次线性方程组(2)的解，而 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是其对应齐次方程组(3)的解，那么 $\boldsymbol{x}_0(t)+\boldsymbol{x}^*(t)$ 是非齐次线性方程组(2)的解.

定理 8　非齐次线性方程组(2)的任意两个解的差是其对应齐次方程组(3)的解.

定理 9　非齐次线性方程组(2)的通解等于其对应的齐次方程组(3)的通解与方程组(2)的一个特解之和. 即若 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 是(2)的一个特解，$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是(3)的 n 个线性无关

解，则

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_n\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{x}^*(t) \quad (13)$$

便是(2)的通解.

题　　解

【385】 设 $\boldsymbol{X}(t)$是线性方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$的解方阵，试证 $\boldsymbol{X}(t)$适合矩阵微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$$

证 记

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n)=\begin{pmatrix}\varphi_1^{(1)} & \varphi_1^{(2)} & \cdots & \varphi_1^{(n)}\\ \varphi_2^{(1)} & \varphi_2^{(2)} & \cdots & \varphi_2^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \varphi_n^{(1)} & \varphi_n^{(2)} & \cdots & \varphi_n^{(n)}\end{pmatrix}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\varphi_1^{(i)}\\ \varphi_2^{(i)}\\ \vdots\\ \varphi_n^{(i)}\end{pmatrix}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}_i\equiv\boldsymbol{A}(t)\begin{pmatrix}\varphi_1^{(i)}\\ \varphi_2^{(i)}\\ \vdots\\ \varphi_n^{(i)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\varphi_j^{(i)}\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}\varphi_j^{(i)}\end{pmatrix}$$

$$(i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\varphi_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\varphi_1^{(n)}}{\mathrm{d}t}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}\varphi_n^{(1)}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\varphi_n^{(n)}}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\varphi_j^{(1)} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}\varphi_j^{(n)}\\ \vdots & & \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}\varphi_j^{(1)} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{nj}\varphi_j^{(n)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1^{(1)} & \cdots & \varphi_1^{(n)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_n^{(1)} & \cdots & \varphi_n^{(n)}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)$$

因而，$X(t)$的适合矩阵微分方程$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)$.

【386】 设含 n 个未知函数的齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}\quad 与\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}$$

有相同的基本解组，求证 $\boldsymbol{A}(t)\equiv\boldsymbol{B}(t)$:

证 设这两个方程组的相同的基本解组为

$$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$$

它们构成一个基解矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$$

那么，必有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是基解矩阵，$\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0$,所以 $\boldsymbol{\Phi}(t)$的逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$一定存在，因而

$$\boldsymbol{A}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{B}(t)$$

证毕.

【387】 试证非齐次线性方程组(1)满足初值条件 $\boldsymbol{Y}(x_0)$

$=\boldsymbol{Y}_0$ 的解的惟一性等价于齐次方程组(2)满足初值条件 $\boldsymbol{Y}(x_0)=0$ 的零解的惟一性.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{F}(x)\\ \boldsymbol{Y}(x_0)=\boldsymbol{Y}_0\end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y}(x_0)=0\end{cases} \tag{2}$$

证 必要性 设 $\boldsymbol{Y}_0(x)$是(1)的惟一解. 显然 $\boldsymbol{Y}(x)\equiv 0$ 满足(2). 下证(2)只有零解. 若不然, 令 $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2$ 是(2)的满足 $Y(x_0)=0$的解且 $\boldsymbol{Y}_1\not\equiv\boldsymbol{Y}_2$, 那么容易验证 $\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{Y}_2$ 是(1)的满足 $\boldsymbol{Y}(x_0)=\boldsymbol{Y}_0$ 的解且 $\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{Y}_1\not\equiv\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{Y}_2$, 这与已知矛盾. 即(2)的解惟一.

充分性 设 $\boldsymbol{Y}$ 是(2)的满足 $\boldsymbol{Y}(x_0)=0$ 的惟一解. 显然 $\boldsymbol{Y}(x)\equiv 0$. 若(1)的满足 $\boldsymbol{Y}(x_0)=\boldsymbol{Y}_0$ 的解不惟一, 不妨令 $\boldsymbol{Y}_1(x)$, $\boldsymbol{Y}_2(x)$是它的两个解且 $\boldsymbol{Y}_1(x)\not\equiv\boldsymbol{Y}_2(x)$. 那么

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2)}{\mathrm{d}x}&=\boldsymbol{A}(x)(\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2)+\boldsymbol{F}(x)-\boldsymbol{F}(x)\\&=\boldsymbol{A}(x)(\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2)\end{aligned}$$

而且, $(\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2)(x_0)=0$. 但是 $\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2\not\equiv 0$. 这与(2)的零解惟一性矛盾, 即(1)的解惟一.

【388】 设 $\boldsymbol{x}(t)$是$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$的复值解, 其中 $\boldsymbol{A}(t)$是实方阵, 试证 $\boldsymbol{x}(t)$的实部、虚部、复数共轭也是此方程组的解.

证 设 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{U}(t)+i\boldsymbol{V}(t)$是$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$的复值

解，其中 $\boldsymbol{U}(t)$，$\boldsymbol{V}(t)$，是实值列向量函数. 那么

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}(t)}{\mathrm{d}t}+i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{U}(t)+i\boldsymbol{V}(t))$$
$$=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t)+i\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{V}(t)$$

因为 $\boldsymbol{A}(t)$为实方阵，上式两边实部与虚部分别相等，所以有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t),\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{V}(t)$$

即 $\boldsymbol{U}(t)$，$\boldsymbol{V}(t)$是此方程组的解. 另一方面，$\overline{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{U}(t)-i\boldsymbol{V}(t)$是 $\boldsymbol{x}(t)$的复数共轭，则

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{x}}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}(t)}{\mathrm{d}t}-i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t)-i\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{V}(t)$$
$$=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{U}(t)-\boldsymbol{V}(t))$$

这表明 $\boldsymbol{x}(t)$的复数共轭也是此方程组的解.

【389】 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是齐次线性方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$是其共轭方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{x}$ 的解，其中 $\boldsymbol{A}^*$是 $\boldsymbol{A}$ 的转置共轭矩阵，试证：$\boldsymbol{\varphi}(t)$与 $\boldsymbol{\psi}(t)$的内积 $(\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\psi}(t))\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k(t)\overline{\psi}_k(t)\equiv$常数.

证　因为 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，$\boldsymbol{\psi}(t)$分别是$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$和$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{x}(t)$的解，所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}\varphi_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}\varphi_k\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}(t)}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{\psi}(t)=-\begin{pmatrix}\bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1}\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{k1}\psi_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{kn}\psi_k\end{pmatrix}$$

因而

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi})}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t},\ \boldsymbol{\psi}\right)+\left(\boldsymbol{\varphi},\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=\left(\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\varphi_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}a_{nk}\varphi_k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{k1}\psi_k\\ \vdots\\ -\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{kn}\psi_k\end{pmatrix}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{mk}\varphi_k\bar{\psi}_m+\sum_{m=1}^{n}\left(-\overline{\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{km}\psi_k\varphi_m}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{mk}\varphi_k\bar{\psi}_m-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{km}\varphi_m\bar{\psi}_k$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varphi_j\bar{\psi}_i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varphi_j\bar{\psi}_i$$

$$=0$$

所以

$$(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi})\equiv\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\overline{\psi_k(t)}\equiv 常数$$

证毕.

【390】 设 $\boldsymbol{x}(t)$是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t) \tag{1}$$

的复值解，这里方阵 $\boldsymbol{A}(t)$和向量 $\boldsymbol{F}(t)$是实的，试证 $\boldsymbol{x}(t)$的实部和其复数共轭也是它的解. 而 $\boldsymbol{x}(t)$的虚部是齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

的解

证 设(1)的复值解形如 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{V}(t)$，这里 $\boldsymbol{u}(t)$，$\boldsymbol{v}(t)$，是实值向量函数，那么

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}+i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t))+\boldsymbol{F}(t)$$

$$=(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{F}(t))+i\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{V}(t)$$

由于 $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{F}(t)$均是实值的，那么可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{F}(t),\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t)$$

因此，$\boldsymbol{u}(t)$是(1)的解，$\boldsymbol{v}(t)$是(2)的解.

另外，由上面所证可知

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}(t)-i\boldsymbol{v}(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}-i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{F}(t)-i\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t)$$

$$=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{u}(t)-i\boldsymbol{v}(t))+F(t)$$

即 $\boldsymbol{x}(t)$的复数共轭 $\boldsymbol{u}(t)-i\boldsymbol{v}(t)$也是(1)的解. 证毕.

【391】 设 $\boldsymbol{A}(t)$是实矩阵，t 是实变量，$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t)$是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)+i\boldsymbol{\psi}(t) \tag{1}$$

的解,其中 $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{\varphi}(t)$和 $\boldsymbol{\psi}(t)$都是实函数, $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位. 试证明 $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$, 分别满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{\psi}(t).$$

证 因为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t)$是(1)的解, 所以

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t))}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t))\\&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}-i\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t)\\&=\boldsymbol{\varphi}(t)+i\boldsymbol{\psi}(t)\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$,$\boldsymbol{\varphi}(t)$和 $\boldsymbol{\psi}(t)$都是实函数, 所以有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{\psi}(t)$$

证毕.

【392】 试证非齐次线性微分方程组的叠加原理: 设 $\boldsymbol{x}_1(t)$、$\boldsymbol{x}_2(t)$分别是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}_1(t) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}_2(t) \tag{2}$$

的解,则 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)$是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}_1(t)+\boldsymbol{F}_2(t) \tag{3}$$

的解.

证　$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)$由已知可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{F}_1(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{F}_2(t)$$
$$=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t))+(\boldsymbol{F}_1(t)+\boldsymbol{F}_2(t))$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}_1(t)+\boldsymbol{F}_2(t)$$

因而 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)$是方程组(3)的解．证毕．

【393】　设向量函数 $\boldsymbol{F}_1(t),\boldsymbol{F}_2(t),\cdots,\boldsymbol{F}_m(t)$，在区间$(a,b)$内线性无关，求证这些向量函数中的部分向量函数在区间(a,b)内也线性无关．换句话说，如果 $\boldsymbol{F}_1(t),\boldsymbol{F}_2(t),\cdots,\boldsymbol{F}_k(t)$在区间$(a,b)$内线性相关，则添上一些函数也线性相关．

证　对任意 k 个向量函数，不妨设为 $\boldsymbol{F}_1(t),\boldsymbol{F}_2(t),\cdots,\boldsymbol{F}_k(t)$ $(k\leqslant m)$，若它们线性相关，则存在 k 个不全为零常数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，使得在(a,b)内有

$$a_1\boldsymbol{F}_1(t)+a_2\boldsymbol{F}_2(t)+\cdots+a_k\boldsymbol{F}_k(t)\equiv 0$$

成立．那么，还可以取 $a_{k+1}=a_{k+2}=\cdots=a_m=0$ 使得

$$a_1\boldsymbol{F}_1(t)+a_2\boldsymbol{F}_2(t)+\cdots+a_k\boldsymbol{F}_k(t)+a_{k+1}\boldsymbol{F}_{k+1}(t)+\cdots+a_m\boldsymbol{F}_m(t)\equiv 0$$

成立．这与已知矛盾．证毕．

【394】　求证：向量函数 $\boldsymbol{F}_1(t),\boldsymbol{F}_2(t),\cdots,\boldsymbol{F}_k(t)$，在$(a,b)$内线性无关，则由这些函数构造出的 k 个新向量函数

$$\boldsymbol{G}_i(t)=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\boldsymbol{F}_j(t)\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

在(a,b)内也线性无关的充分必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

证 令

$$\boldsymbol{F}_j(t)=\begin{pmatrix} f_{1j}(t) \\ f_{2j}(t) \\ \vdots \\ f_{kj}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_i(t)=\begin{pmatrix} g_{1i}(t) \\ g_{2i}(t) \\ \vdots \\ g_{ki}(t) \end{pmatrix} \quad (i,j=1,2,\cdots,k)$$

因此,

$$\boldsymbol{G}_i(t)=\begin{pmatrix} g_{1i}(t) \\ g_{2i}(t) \\ \vdots \\ g_{ki}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} a_{ij}f_{1j}(t) \\ \sum_{j=1}^{k} a_{ij}f_{2j}(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{k} a_{ij}f_{kj}(t) \end{pmatrix}$$

所以，若 $\boldsymbol{G}_i(t)$在(a,b)内线性无关，只有 $l_1=l_2=\cdots=l_k=0$ 时,对于 $t\in(a,b)$,

$$l_1\boldsymbol{G}_1(t)+l_2\boldsymbol{G}_2(t)+\cdots+l_k\boldsymbol{G}_k(t)\equiv 0$$

$$
\text{上式左端}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_i a_{ij}f_{1j}(t)\\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_i a_{ij}f_{2j}(t)\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_i a_{ij}f_{kj}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}l_i a_{1j}(t)\\ \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}l_i a_{ij}f_{2j}(t)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}l_i a_{ij}f_{kj}(t)\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{k}l_ia_{i1}f_{11}(t)\\ \sum_{i=1}^{k}l_ia_{i1}f_{21}(t)\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{k}l_ia_{i1}f_{k1}(t)\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{k}l_ia_{ik}f_{1k}(t)\\ \sum_{i=1}^{k}l_ia_{ik}f_{2k}(t)\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{k}l_ia_{ik}f_{kk}(t)\end{pmatrix}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{k}l_ia_{i1}\boldsymbol{F}_1(t)+\cdots+\sum_{i=1}^{k}l_ia_{ik}\boldsymbol{F}_k(t)\equiv 0
$$

因为 $\boldsymbol{F}_1(t),\boldsymbol{F}_2(t),\cdots,\boldsymbol{F}_k(t)$ 线性无关，所以

$$
\sum_{i=1}^{k}l_ia_{i1}=\sum_{i=1}^{k}l_ia_{i2}=\cdots=\sum_{i=1}^{k}l_ia_{ik}=0
$$

即

$$
\begin{cases}a_{11}l_1+a_{21}l_2+\cdots+a_{k1}l_k=0\\ a_{12}l_1+a_{22}l_2+\cdots+a_{k2}l_k=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1k}l_1+a_{2k}l_2+\cdots+a_{kk}l_k=0\end{cases}
$$

对于这个齐次线性方程组只有零解当且仅当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

或当且仅当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

证毕.

【395】 设 $\boldsymbol{X}(t)$是常系数线性方程组$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$的基解矩阵，适合条件 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}$，试证对任何 t,s 成立等式

$$\boldsymbol{X}(t+s)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(s)$$

证 令 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{C}$ （$\boldsymbol{C}$ 是常向量）

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t)=\boldsymbol{X}(t+s)\boldsymbol{C}$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{C} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t+s)}{\mathrm{d}(t+s)}\cdot\frac{\mathrm{d}(t+s)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C} \tag{2}$$

因为 $\boldsymbol{X}(t)$是$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$的基解矩阵，所以(1)、(2)两式还成立

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}_1(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t+s)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}_2(t)$$

又因为 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}$，所以有

$$\boldsymbol{\varphi}_1(0)=\boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{C},\qquad \boldsymbol{\varphi}_2(0)=\boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{C}$$

所以根据解的惟一性定理可知

$$\boldsymbol{X}(t+s)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{C}$$

因而有

$$\boldsymbol{X}(t+s)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(s)$$

证毕.

【396】 设 $\boldsymbol{X}(t)$是连续的 n 阶方阵，$\boldsymbol{X}(0)$存在，且适合关系

$$\boldsymbol{X}(t+s)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(s),\qquad |\boldsymbol{X}(0)|\neq 0$$

试证：存在 n 阶常值方阵 $\boldsymbol{A}$，使得 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$.

证　因为

$$\boldsymbol{X}(t+s)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(s) \tag{1}$$

若令 $s=0$，则有

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(0) \tag{2}$$

由于 $|\boldsymbol{X}(0)|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{X}^{-1}(0)$存在. 那么由(2)式可得

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(0) \tag{3}$$

由(2)、(3)两式可得

$$\boldsymbol{X}^{-1}(0)=\boldsymbol{X}(0),\quad 即\quad \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}$$

若在(1)式中令 $t=-s$，则有 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}(-s)\cdot\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{E}$，因而

$$\boldsymbol{X}(-s)=\boldsymbol{X}^{-1}(s)$$

在 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t+s)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}(s)$ 两边右乘 $X^{-1}(s)$，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t+s)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}^{-1}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}$$

此时若令 $t=-s$，并注意到 $\boldsymbol{X}^{-1}(-t)=\boldsymbol{X}(t)$，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\boldsymbol{X}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}$$

取 $\boldsymbol{A}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$$

证毕.

【397】 设$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$. 若$\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)\mathrm{d}t=+\infty$,这里 $a_{ii}(t)$是$\boldsymbol{A}(t)$对角线上的元素，$\boldsymbol{A}(t)$在$[t_0,+\infty)$上连续，求证该方程组至少有一个解在$[t_0,+\infty)$上无界.

证 反证法 若方程组$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$的一切解在$[t_0,+\infty)$上有界. 那么，该方程组的一个基解矩阵的朗斯基行列式 $W(t)=W(t_0)\exp\displaystyle\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 在$[t_0,+\infty)$上有界，这与$\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)\mathrm{d}t=+\infty$矛盾. 所以，方程组至少有一个解在$[t_0,+\infty)$上无界. 证毕.

【398】 设$\boldsymbol{\Phi}(t)$是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1}$$

的一个基解矩阵,其中$\boldsymbol{A}(t+\omega)=\boldsymbol{A}(t)$. 试证明：$\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)$也是基解矩阵且存在矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\det\boldsymbol{B}\neq0$使得$\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}$.

证 由于$\boldsymbol{\Phi}(t)$是基本矩阵，即有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)}{\mathrm{d}(t+\omega)}=\boldsymbol{A}(t+\omega)\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)$$

即 $\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)$也是基解矩阵.

设 $\boldsymbol{\Phi}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$

$$\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)=(\boldsymbol{x}_1(t+\omega),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t+\omega)) \tag{2}$$

因为每个 $\boldsymbol{x}_i(t+\omega)$ $(i=1,\cdots,n)$都是方程组(1)的解，则由定理 4 知，存在常数 $C_{ji}(j=1,\cdots,n)$，使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i(t+\omega)&=C_{1i}\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+C_{ni}\boldsymbol{x}_n(t)\\&=(C_{1i},\cdots,C_{ni})\boldsymbol{\Phi}(t)\end{aligned} \tag{3}$$

将(3)代入(2)式得

$$\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)=\boldsymbol{\Phi}(t)\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$$

取

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}(t+\omega)$也是方程组的基解矩阵，因而 $\det\boldsymbol{B}\neq0$. 证毕.

【399】 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

的基解矩阵. 试证明：$\boldsymbol{U}(t,s)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)$与基本解矩阵的选取无关，即对任意基解矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$

$$\boldsymbol{U}(t,s)=\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)\widetilde{\boldsymbol{\Phi}^{-1}}(s)$$

证　对基解矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$，和上题的证明类似，必存在非退化常数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c},\quad \widetilde{\boldsymbol{\Phi}^{-1}}(s)=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)$$

因此

$$U(t,s)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)$$

证毕.

【400】 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$为一个函数阵，$\boldsymbol{\Phi}'(t)\big|_{t=0}$存在，并且 $\boldsymbol{\Phi}(t+s)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(s)$，$\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$，则存在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)$$

证 因为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{s\to0}\frac{\boldsymbol{\Phi}(s+t)-\boldsymbol{\Phi}(t)}{s}=\lim_{s\to0}\frac{\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{\Phi}(t)-\boldsymbol{\Phi}(t)}{s}$$
$$=\lim_{s\to0}\frac{\boldsymbol{\Phi}(s)-\boldsymbol{\Phi}(0)}{s}\boldsymbol{\Phi}(t)$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}'(t)\big|_{t=0}$存在，那么可以取

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\Phi}'(t)\big|_{t=0}=\lim_{s\to0}\frac{\boldsymbol{\Phi}(s)-\boldsymbol{\Phi}(0)}{s}$$

使得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)$$

证毕.

【401】 $\boldsymbol{x}(t)=e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t)$是$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的解，$\boldsymbol{p}(t)$的每一分量是最高次数为 k 的多项式函数，求证

$$e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t),e^{\lambda t}\boldsymbol{p}'(t),\cdots,e^{\lambda t}\boldsymbol{p}^{(k)}(t) \tag{1}$$

线性无关，并且在$(-\infty,+\infty)$上当 $k=n-1$ 时，它们是一个基本解组，$\boldsymbol{p}^{(k)}(t)$表 $\boldsymbol{p}(t)$的 k 阶导函数.

证 因为 $e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t)$是解，所以有

$$(e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t))'=\boldsymbol{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t) \tag{2}$$

即

$$e^{\lambda t}\boldsymbol{p}'(t)+\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t)$$

对上式两边求导可得

$$(e^{\lambda t}\boldsymbol{p}'(t))'+\lambda(e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t))'=\lambda\boldsymbol{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t)+\boldsymbol{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{p}'(t) \tag{3}$$

将(2)式代入(3)式可得

$$(e^{\lambda t}\boldsymbol{p}'(t))'=\boldsymbol{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{p}'(t)$$

即 $e^{\lambda t}\boldsymbol{p}'(t)$也是$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$的解．由此可得 $e^{\lambda t}\boldsymbol{p}^{(2)}(t),\cdots,e^{\lambda t}\boldsymbol{p}^{(k)}(t)$也是齐次方程组的解．

下面证明(1)中的向量函数组在$(-\infty,+\infty)$上线性无关，由于 $\boldsymbol{p}(t)$为 k 次多项式，$p_i'(t)$为 $k-1$ 次多项式，…，$p_i^{(k)}(t)$是零次式多项式$(i=1,\cdots,n)$．

因而

$$C_0e^{\lambda t}\boldsymbol{p}(t)+C_1e^{\lambda t}\boldsymbol{p}'(t)+\cdots+C_ke^{\lambda t}\boldsymbol{p}^{(k)}(t)\equiv 0$$

当且仅当

$$C_0\boldsymbol{p}(t)+C_1\boldsymbol{p}'(t)+\cdots+C_k\boldsymbol{p}^{(k)}(t)\equiv 0$$

当且仅当

$$C_0=C_1=\cdots=C_k=0$$

所以向量函数组(1)在$(-\infty,+\infty)$上线性无关．特别地，根据齐次方程组至多有 n 个线性无关解知，当 $k=n-1$ 时，它们恰好构成方程组的一个基本解组．证毕．

【402】 试证明:对于初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0\end{cases}$$

当 $\boldsymbol{A}(t)$与$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s$ 可交换时，它们的基解矩阵可表示成

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_0(\exp\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s)$$

(其中 $\exp\boldsymbol{A}\triangleq\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}+\cdots$，参看 §5.3 提要).

证 此初值问题可等价于积分方程

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$$

对上述积分方程，应用毕卡逐次逼近法.

只需考虑 $\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{X}_0(t)=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{X}_1(t)=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{x}_0(s)\mathrm{d}s=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_2(t)&=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s\\&=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\Big(\int_{t_0}^{\tau}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}\tau\\&=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\Big(\int_{t_0}^{\tau}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}\Big(\int_{t_0}^{\tau}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}\tau\Big)\\&=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2!}\Big(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\Big)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_3(t)&=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{x}_2(s)\mathrm{d}s\\&=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\Big(\int_{t_0}^{\tau}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}\tau\\&\qquad+\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\Big(\int_{t_0}^{\tau}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\Big)^2\mathrm{d}\tau\\&=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2!}\Big(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\Big)^2+\frac{1}{3!}\Big(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\Big)^3\end{aligned}$$

由归纳法易知

$$\boldsymbol{X}_0(t)=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\right)^n$$

显然

$$\boldsymbol{X}(t)=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{X}_n(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\right)$$

证毕.

【403】 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$是$[a,b]$上的连续 $n\times n$ 函数矩阵. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是(1)的一个基解矩阵,n 维向量函数$\boldsymbol{F}(t,x)$在

$$R:\ a\leqslant t\leqslant b \qquad \|\boldsymbol{x}\|<\infty$$

上连续, $t_0\in[a,b]$. 试证明: 初值问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(t,x)\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\eta\end{cases} \tag{2}$$

的惟一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程组

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s \tag{2$'$}$$

的连续解. 反之, $(2)'$的解也是初值问题(2)的解.

证 因为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是(1)的一个基解矩阵, 令

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}(t) \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{C}(t)$是待定的 n 维列向量函数.

假设(2)有形如(3)的解, 将(3)代入(2)中的方程组得

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{C}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}(t)+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$$

又因为 $\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$,所以

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

因为在$[a,b]$上 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是非奇异的，所以 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$存在. 用 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$乘(4)式两边后再积分可得

$$\boldsymbol{C}(t)=\boldsymbol{C}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s$$

$$t_0,t\in[a,b],\qquad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}$$

代回(1)式即得

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s$$

即 $\boldsymbol{x}(t)$也是(2)′的解.

反之，设 $\boldsymbol{x}(t)$是(2)′的连续解，对(2)式两端微分可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\\&\qquad\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t))\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\\&\qquad\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t))\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t))\end{aligned}$$

而且 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$

因而，(2)′的解初值问题也是(2)的解.

【404】 设 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$, $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$, …, $\boldsymbol{x}^{(n+1)}(t)$，是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(t) \tag{1}$$

在区间$[a,b]$上的 $n+1$ 个线性无关解，求证：

1) (1)的任一解 $x(t)$恒可表为

$$\boldsymbol{x}(t)=\alpha_1\boldsymbol{x}_1(t)+\alpha_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\alpha_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}(t),\quad t\in[a,b] \tag{2}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$是满足

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1 \tag{3}$$

的某些常数.

2) 对于任何满足(3)式的常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$，(2)式均为(1)的解.

证　1) 设 $\boldsymbol{x}(t)$是(1)在$[a,b]$上的任一解，那么

$$\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_1(t),\ \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_2(t),\ \cdots,\ \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_{n+1}(t)$$

是相应齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{4}$$

的解. 又因为(4)最多有 n 个线性无关解,所以必存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_{n+1}$，使得 $t\in[a,b]$

$$k_1(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_1(t))+\cdots+k_{n+1}(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_{n+1}(t))\equiv 0$$

即

$$(k_1+k_2+\cdots+k_{n+1})\boldsymbol{x}(t)=k_1\boldsymbol{x}_1(t)+k_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+k_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}(t)$$

显然，$k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}\neq 0$. 否则，存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$，使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1(t)+k_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+k_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}(t)=0$$

这与 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_{n+1}(t)$线性无关矛盾. 因此,

$$\boldsymbol{x}(t)=\frac{k_1}{k_1+\cdots+k_{n+1}}\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+\frac{k_{n+1}}{k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}}\boldsymbol{x}_{n+1}(t)$$

令　$$\alpha_i=\frac{k_i}{k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}},\quad (i=1,2,\cdots,n+1),$$

显然，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}=1$.

2)对任何 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$，且

$$\boldsymbol{x}(t)=\alpha_1\boldsymbol{x}_1(t)+\alpha_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\alpha_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}(t)$$

有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\alpha_1\boldsymbol{x}_1(t)+\alpha_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\alpha_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}(t))}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}\text{上式右端}&=[\boldsymbol{A}(t)\alpha_1\boldsymbol{x}_1(t)+\alpha_1\boldsymbol{F}(t)]+\cdots+[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_{n+1}(t)\\&\quad+\alpha_{n+1}\boldsymbol{F}(t)]\\&=\boldsymbol{A}(t)[\alpha_1\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+\alpha_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}(t)]+(\alpha_1+\cdots\\&\quad+\alpha_{n+1})\boldsymbol{F}(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t)\end{aligned}$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{F}(t)$$

因此，满足(3)式的(2)式均为(1)的解. 证毕.

【405】 证明：方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t)\tag{1}$$

在区间$[a,b]$上至多有 $n+1$ 个线性无关解.

证 设 $\boldsymbol{x}_1(t)$，$\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是方程组(1)的相应齐次方程组的 n 个线性无关解，$\boldsymbol{x}_0(t)$上(1)的任意一个特解，则

$$\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_0(t),\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{x}_0(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{x}_0(t),\boldsymbol{x}_0(t)$$

是(1)的 $n+1$ 个线性无关解. 这是因为，若存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n,k_0$. 使得

$$\begin{aligned}&k_1(\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_0(t))+k_2(\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{x}_0(t))+\cdots\\&\qquad+k_n(\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{x}_0(t))+k_0\boldsymbol{x}_0(t)\equiv0\end{aligned}$$

则一定有 $k_1+k_2+\cdots+k_n+k_0=0$. 否则,

$$x_0(t)=\frac{-k_1}{k_1+k_2+\cdots+k_n+k_0}x_1(t)+\cdots$$

$$+\frac{-k_n}{k_1+k_2+\cdots+k_n+k_0}x_n(t)$$

这与 $x_0(t)$是(1)的解矛盾. 所以,

$$k_1x_1(t)+k_2x_2(t)+\cdots+k_nx_n(t)\equiv 0$$

由假设可知,$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$,而且 $k_{n+1}=0$. 所以,(1)可以有 $n+1$ 个线性无关解. 由上题知(1)的任意 $n+2$ 个解线性相关.

因此,非齐次方程组(1)有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

【406】 设向量组 $h_1,h_2,\cdots,h_k$, 是线性无关的且适合关系

$$Ah_1=\lambda h_1,\ Ah_2=h_1+\lambda h_2,\ \cdots,\ Ah_k=h_{k-1}+\lambda h_k \tag{1}$$

试证明

$$x_r=\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}h_1+\cdots+th_{r-1}+h_r\right)e^{\lambda t}\qquad(r=1,2,\cdots,k)$$

都是方程组

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

的解.

证 因为

$$\frac{dx_r}{dt}=\frac{d\left[\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}h_1+\cdots+\frac{t^2}{2!}h_{r-2}+th_{r-1}+h_r\right)e^{\lambda t}\right]}{dt}$$

$$(r=1,2,\cdots,k)$$

由题设(1)

$$
\text{上式右端}=\left[\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\boldsymbol{h}_1+\cdots+t\boldsymbol{h}_{r-2}+\boldsymbol{h}_{r-1}\right]e^{\lambda t}
+\lambda\left[\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\boldsymbol{h}_1+\cdots+t\boldsymbol{h}_{r-1}+\boldsymbol{h}_r\right]e^{\lambda t}
$$

$$
=\left[\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\lambda\boldsymbol{h}_1+\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}(\boldsymbol{h}_1+\lambda\boldsymbol{h}_2)+\cdots
+t(\boldsymbol{h}_{r-2}+\lambda\boldsymbol{h}_{r-1})+(\boldsymbol{h}_{r-1}+\lambda\boldsymbol{h}_r)\right]e^{\lambda t}
$$

$$
=\left[\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1+\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2+\cdots
+t\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{r-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_r\right]e^{\lambda t}
$$

$$
=\boldsymbol{A}\left[\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\boldsymbol{h}_1+\cdots+t\boldsymbol{h}_{r-1}+\boldsymbol{h}_r\right]e^{\lambda t}
=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r
$$

即有

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_r}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r\qquad(r=1,2,\cdots,k)
$$

所以，$\boldsymbol{x}_r$ 是方程组的解．证毕．

【407】 试证明

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)&\cdots&a_{2n}(t)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}(t)&a_{n2}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{vmatrix}
=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\\frac{\mathrm{d}a_{k1}(t)}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}a_{k2}(t)}{\mathrm{d}t}&\cdots&\frac{\mathrm{d}a_{kn}(t)}{\mathrm{d}t}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}(t)&a_{n2}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{vmatrix}
$$

证 当 $n=2$ 时，直接验证知等式成立．假设当 $n=m$ 时，

等式成立，那么当 $n=m+1$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) & a_{1\,m+1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mm}(t) & a_{m\,m+1}(t) \\ a_{m+1\,1}(t) & \cdots & a_{m+1\,m}(t) & a_{m+1\,m+1}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{1+k}a_{1k}(t)$$

$$\cdot\begin{vmatrix} a_{21}(t) & \cdots & a_{2\,k-1}(t) & a_{2\,k+1}(t) & \cdots & a_{2\,m+1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m+1\,1}(t) & \cdots & a_{m+1\,k-1}(t) & a_{m+1\,k+1}(t) & \cdots & a_{m+1\,m+1}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{d}a_{1k}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} a_{21}(t) & \cdots & a_{2\,k-1}(t) & a_{2\,k+1}(t) & \cdots & a_{2\,m+1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m+1\,1}(t) & \cdots & a_{m+1\,k-1}(t) & a_{m+1\,k+1}(t) & \cdots & a_{m+1\,m+1}(t) \end{vmatrix}$$

$$+\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}a_{1k}(t)\sum_{i=2}^{m+1}\begin{vmatrix} a_{21}(t) & \cdots & a_{2\,m+1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}a_{i1}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}a_{i\,m+1}}{\mathrm{d}t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+1\,1}(t) & \cdots & a_{m+1\,m+1}(t) \end{vmatrix}$$

$$\text{上式右端}=\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}a_{11}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}a_{m+1}(t)}{\mathrm{d}t} \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2\,m+1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+1\,1}(t) & \cdots & a_{m+1\,m+1}(t) \end{vmatrix}+\sum_{i=2}^{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}a_{1k}(t)$$

$$\cdot\begin{vmatrix} a_{21}(t) & \cdots & a_{2k-1}(t) & a_{2k+1}(t) & \cdots & a_{2m+1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}a_{i1}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}a_{ik-1}(t)}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}a_{ik+1}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}a_{im+1}(t)}{\mathrm{d}t} \\ a_{m+1\,1}(t) & \cdots & a_{m+1\,k-1}(t) & a_{m+1\,k+1}(t) & \cdots & a_{m+1\,m+1}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}a_{k1}(t)}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}a_{k2}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}a_{kn}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+11}(t) & a_{m+12}(t) & \cdots & a_{m+1m+1}(t) \end{vmatrix}$$

即当 $n = m+1$ 时，等式成立.

由数学归纳法可知，结论成立. 证毕.

【408】 求解下列含有六个未知函数的一阶方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = \lambda z_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \beta x_1 + \alpha x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = z_1 + \lambda z_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = x_1 + \alpha x_3 - \beta x_4 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}t} = x_2 + \beta x_3 + \alpha x_4 \end{cases}$$

并推出方程组解的表达式，这里 α, β 是实常数，并且 $\alpha + i\beta = \lambda$.

解　由$\frac{dz_1}{dt}=\lambda z_1$，得

$$z_1=C_1e^{\lambda t} \tag{1}$$

代入$\frac{dz_2}{dt}=z_1+\lambda z_2$，得$\frac{dz_2}{dt}=C_1e^{\lambda t}+\lambda z_2$，
解之得，

$$z_2=C_2e^{\lambda t}+C_1te^{\lambda t} \tag{2}$$

若令 $\lambda=\alpha+\beta i$，$z_1=x_1+x_2i$，则

$$\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_2}{dt}i=(\alpha+\beta i)(x_1+x_2\beta)=\alpha x_1-\beta x_2+i(\beta x_1+\alpha x_2)$$

于是有

$$\frac{dx_1}{dt}=\alpha x_1-\beta x_2,\qquad \frac{dx_2}{dt}=\beta x_1+\alpha x_2$$

即得 x_1，x_2 分别是 z_1 的实部和虚部.

令 $C_1=r_1e^{i\theta_1}$，则

$$z_1=r_1e^{(\alpha+\beta i)t}e^{i\theta_1}=r_1e^{\alpha t}e^{i(\theta_1+\beta t)}$$

则

$$x_1=re^{\alpha t}\cos(\theta_1+\beta t)\qquad x_2=r_1e^{\alpha t}\sin(\theta_1+\beta t)$$

同样，令 $z_2=x_3+ix_4$ 由

$$\frac{dz_2}{dt}=z_1+\lambda z_2$$

得

$$\frac{d(x_3+ix_4)}{dt}=x_1+ix_2+(\alpha+i\beta)(x_3+ix_4)$$

实部与虚部分开，即有

$$\frac{dx_3}{dt}=x_1+\alpha x_3-\beta x_4\qquad \frac{dx_4}{dt}=x_2+\beta x_3+\alpha x_4$$

由(2)式 $z_2=C_2e^{\lambda t}+C_1te^{\lambda t}$，再令 $C_2=r_2e^{i\theta_2}$得

$$z_2=r_1te^{\alpha t}e^{i(\theta_1+\beta t)}+r_2e^{\alpha t}e^{i(\theta_2+\beta t)}$$

于是有

$$x_3=r_1te^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_1)+r_2e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_2)$$

$$x_4=r_1te^{\alpha t}\sin(\beta t+\theta_1)+r_2e^{\alpha t}\sin(\beta t+\theta_2)$$

那么，所求方程组的解为

$$\begin{cases} z_1=r_1e^{\alpha t}e^{i(\theta_1+\beta t)} \\ z_2=r_1te^{\alpha t}e^{i(\theta_1+\beta t)}+r_2e^{\alpha t}e^{i(\theta_2+\beta t)} \\ x_1=r_1e^{\alpha t}\sin(\theta_1+\beta t) \\ x_2=r_1e^{\alpha t}\sin(\theta_1+\beta t) \\ x_3=r_1te^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_1)+r_2e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_2) \\ x_4=r_1te^{\alpha t}\sin(\beta t+\theta_1)+r_2e^{\alpha t}\sin(\beta t+\theta_2). \end{cases}$$

【409】 求解方程

$$\frac{dz}{dt}=z^2+iz$$

并推出方程组

$$\frac{dx}{dt}=x^2-y^2-y, \qquad \frac{dy}{dt}=x+2xy$$

的解.

解 令 $y=\frac{1}{z}$，那么

$$\frac{dz}{dt}=z^2+iz$$

可化为

$$\frac{dy}{dt}+iy=-1$$

解之，得

$$y = e^{-\int i\mathrm{d}t}\left(C + \int - e^{\int i\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)$$

即得

$$y = Ce^{-it} + i$$

则

$$z = \frac{1}{y} = \frac{1}{Ce^{-it} + i}$$

令 $C = re^{i\theta}$，那么

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{re^{i\theta}e^{-it} + i} = \frac{1}{r[\cos(\theta - t) + i\sin(\theta - t)] + i} \\ &= \frac{r\cos(\theta - t) - [r\sin(\theta - t) + 1]i}{r^2\cos^2(\theta - t) + r^2\sin^2(\theta - t) + 2r\sin(\theta - t) + 1} \\ &= \frac{r\cos(\theta - t)}{r^2 + 2r\sin(\theta - t) + 1} + i\,\frac{-[r\sin(\theta - t) + 1]}{r^2 + 2r\sin(\theta - t) + 1} \end{aligned} \tag{1}$$

若令 $z = x + yi$，代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x^2 + 2ixy - y^2 + ix - y$$

则 z 的实部与虚部分别满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - y^2 - y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2xy + x$$

因而，由(1)式得上述方程组的通解为

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{r\cos(\theta - t)}{r^2 + 2r\sin(\theta - t) + 1} \\ y(t) = -\dfrac{r\sin(\theta - t) + 1}{r^2 + 2r\sin(\theta - t) + 1} \end{cases}$$

其中 $r \geqslant 0$，θ 为任意常数.

【410】 试证方程组

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & x \\ -\sin t & \cos t & y \\ -\sin t & \cos t & \dot{x} \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & x \\ -\sin t & \cos t & y \\ -\cos t & -\sin t & \dot{y} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

是常系数线性微分方程组，并证明

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

是它的基解矩阵.

证 由(1)得

$$\dot{x}\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\dot{x} - y = 0 \tag{1}'$$

由(2)得

$$\dot{y}\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\dot{y} + x = 0 \tag{2}$$

令

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\varphi}_1, \ \boldsymbol{\varphi}_2)$$

由

$$\det\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}=1$$

知 $\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2$ 在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 易验证

$$\boldsymbol{\varphi}_1=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\varphi}_2=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x\end{cases}$$

所以

$$\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

是方程组(1)、(2)的基解矩阵.

【411】 试作出以方阵

$$\begin{pmatrix}e^{2t}(\cos6t+2\sin6t) & e^{-13t}(\sin6t-2\cos6t)\\ e^{2t}(-\sin6t+2\cos6t) & e^{-13t}(\cos6t+2\sin6t)\end{pmatrix}$$

为基解矩阵的一阶线性微分方程组.

解 由上题可知，所求方程组为

$$\begin{vmatrix}e^{2t}(\cos6t+2\sin6t) & e^{-13t}(\sin6t-2\cos6t) & x\\ e^{2t}(-\sin6t+2\cos6t) & e^{-13t}(\cos6t+2\sin6t) & y\\ [e^{2t}(\cos6t+2\sin6t)]' & [e^{-13t}(\sin6t-2\cos6t)]' & \dot{x}\end{vmatrix}=0 \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix}e^{2t}(\cos6t+2\sin6t) & e^{-13t}(\sin6t-2\cos6t) & x\\ e^{2t}(-\sin6t+2\cos6t) & e^{-13t}(\cos6t+2\sin6t) & y\\ [e^{2t}(-\sin6t+2\cos6t)]' & [e^{-13t}(\cos6t+2\sin6t)]' & \dot{y}\end{vmatrix}=0 \quad (2)$$

将(1)、(2)展开并整理得所求的微分方程组为

$$\begin{cases}\dot{x}=(12\cos^2 6t+9\cos 6t\sin 6t)y-(9\cos^2 6t-12\cos 6t\sin 6t+1)x\\ \dot{y}=-(12\sin^2 6t-9\cos 6t\sin 6t)x+(9\sin^2 6t+12\cos 6t\sin 6t+1)y.\end{cases}$$

【412】 已知

$$\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$$

为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2\end{cases}$$

的基本解组. 试求: $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2)$

解 由已知得

$$\begin{cases}\cos t=a_{11}(t)\sin t+a_{12}(t)\cos t\\ -\sin t=a_{21}(t)\sin t+a_{22}(t)\cos t\\ -\sin t=a_{11}\cos t-a_{12}(t)\sin t\\ -\cos t=a_{21}(t)\cos t-a_{22}(t)\sin t\end{cases}$$

解之得

$$a_{11}(t)=a_{22}(t)=0$$

$$a_{12}(t)=-a_{21}(t)=1.$$

【413】 验证 $x=-\sin t$, $y=\cos t$ 是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x\cos^2 t-y(1+2\sin t\cos t) & (1)\\ \dfrac{dy}{dt}=x(1-2\sin t\cos t)-2y\sin^2 t & (2)\end{cases}$$

的解,并求出它的全部解.

解　当 $x=-\sin t$，$y=\cos t$ 时，

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\cos t$，而 $-2(-\sin t)\cos^2 t-\cos t(1+2\sin t\cos t)=-\cos t$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\sin t$；而 $(-\sin t)(1-2\sin t\cos t)-2\cos t\sin^2 t=-\sin t$

所以，$x=-\sin t$，$y=\cos t$ 是方程组(1)、(2)的解.

设 $x=x(t)$，$y=y(t)$是(1)、(2)的其他解，由刘维尔公式可得

$$\begin{vmatrix}-\sin t & x\\ \cos t & y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & x(0)\\ 1 & y(0)\end{vmatrix}e^{\int_0^t(-2\cos^2 t-2\sin^2 t)\mathrm{d}t}$$

所以，$-y\sin t-x\cos t=-x(0)e^{-2t}$，即

$$y=\frac{x(0)e^{-2t}-x\cos t}{\sin t}$$

代入(1)得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2x\cos^2 t-\frac{x(0)e^{-2t}-x\cos t}{\sin t}(1+2\sin t\cos t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x\cos t}{\sin t}-\frac{(x(0)+2x(0)\sin t\cos t)e^{-2t}}{\sin t}$$

令 $x(0)=C_1$，所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x\cot t=-C_1\frac{1+2\sin t\cos t}{\sin t}e^{-2t}$$

$$\begin{aligned}x&=e^{\int\cot t\mathrm{d}t}\left(C_2-\int C_1\frac{1+2\sin t\cos t}{\sin t}e^{-2t}\cdot e^{\int\cot t\mathrm{d}t}\right)\\&=\sin t\left(C_2-C_1\int\frac{1+2\sin t\cos t}{\sin t}e^{-2t}\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

$$= \sin t\left(C_2 - C_1e^{-2t}\cot t + 2C_1\int \cot te^{-2t}\mathrm{d}t - 2C_1\int \cot te^{-2t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= C_2\sin t + C_1e^{-2t}\cos t$$

所以

$$y = \frac{C_1e^{-2t} - (C_2\sin t + C_1e^{-2t}\cos t)\cos t}{\sin t}$$

$$= C_1e^{-2t}\sin t - C_2\cos t$$

所以

$$\begin{cases} x = C_1e^{-2t}\cos t + C_2\sin t \\ y = C_1e^{-2t}\sin t - C_2\cos t \end{cases} \quad (C_1C_2\text{ 为任意常数})$$

为方程组(1)、(2)的全部解.

【414】 试举出 n 个 n 维函数列向量，它们的朗斯基行列式 $W(t)\equiv 0$，但它们在定义区间上是线性无关的.

解 例如

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2(t)=\begin{pmatrix}t\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3(t)=\begin{pmatrix}t^2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n(t)=\begin{pmatrix}t^n\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

显然，$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是线性无关的.

但

$$\boldsymbol{W}(t)=\begin{vmatrix}1 & t & \cdots & t^n\\0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}\equiv 0.$$

【415】 设 $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,3)$在 $-\infty<t<+\infty$上连续，

已知方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+a_{13}(t)x_3\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+a_{23}(t)x_3\\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2+a_{33}(t)x_3+t\end{cases}$$

所对应的齐次方程组的一基本解组为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t,\quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t$$

试求所给方程组的通解及满足初值条件

$$x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)$$

的特解.

解　运用常数变易法设非齐次方程组的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1(t)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C_2(t)\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t+C_3(t)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t$$

代入非齐次方程组得

$$C_1'(t)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C_2'(t)\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t+C_3'(t)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t=\begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix}$$

解得

$$C_1'(t)=t,\quad C_2'(t)=-te^{-t},\quad C_3'(t)=(t^2+2t)e^{-t}$$

所以

$$\begin{cases} C_1(t)=\dfrac{1}{2}t^2+C_1 \\ C_2(t)=(t+1)e^{-t}+C_2 \\ C_3(t)=-(t^2+4t+4)e^{-t}+C_3 \end{cases}$$

所以,通解为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t)=&\frac{1}{2}t^2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+(t+1)e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t \\ &-(t^2+4t+4)e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t+C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t+C_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t)=&\frac{1}{2}t^2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+(t+1)\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}-(t^2+4t+4)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\ &+C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t+C_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t \end{aligned}$$

或写为

$$\begin{cases} x_1(t)=C_1+C_2e^t+\dfrac{t^2}{2}+t+1 \\ x_2(t)=-C_1+C_2(1+t)e^t+C_3e^t-\dfrac{1}{2}t^2-2t-3 \\ x_3(t)=-C_1+C_2te^t+C_3e^t-\dfrac{1}{2}t^2-3t-4 \end{cases}$$

而满足初值条件 $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)$的特解为

$$\begin{cases}x_1(t)=-e^t+\dfrac{1}{2}t^2+t+1\\ x_2(t)=(3-t)e^t-\dfrac{1}{2}t^2-2t-3\\ x_3(t)=(-t+4)e^t-\dfrac{1}{2}t^2-3t-4.\end{cases}$$

【416】 考虑线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{f}(t)$都是以 ω 为周期的周期(矩阵与向量值)函数(即 $\boldsymbol{A}(t)$及 $\boldsymbol{f}(t)$的每一元素均是以 ω 为周期的周期函数). 设 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t),\boldsymbol{x}^{(2)}(t),\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}(t)$是对应的齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{2}$$

的基本解组, 满足如下的初值条件

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{x}^{(2)}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad\cdots\quad \boldsymbol{x}^{(n)}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

求证: 1) 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是方程组(1)的解, 则它是(1)的以 ω 为周期的周期解的充要条件是$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\varphi}(\omega)$.

2) 对于任何连续周期函数 $\boldsymbol{f}(t)$(周期等于 ω), (1)有惟一的周期解(周期为 ω)的充要条件是矩阵

$\boldsymbol{X}(\omega)=(\boldsymbol{x}^{(1)}(\omega),\boldsymbol{x}^{(2)}(\omega),\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}(\omega))$ 没有等于 1 的特征根.

证 1) 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是方程组(1)的以 ω 为周期的周期解, 则

显然必须有 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\varphi}(\omega)$.

反之，设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是(1)的解，且 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\varphi}(\omega)$. 下证 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是以 ω 为周期的函数. 由

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t+\omega)\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)+\boldsymbol{f}(t+\omega)$$

以及

$$\boldsymbol{A}(t+\omega)=\boldsymbol{A}(t) \qquad \boldsymbol{f}(t+\omega)=\boldsymbol{f}(t)$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)+\boldsymbol{f}(t)$$

并且

$$\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)\Big|_{t=0}=\boldsymbol{\varphi}(\omega), \qquad \boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\varphi}(\omega)$$

由初值问题(1)的解的存在惟一性知 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)$

2) 设 $\boldsymbol{X}(t)$是以 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$, $\boldsymbol{x}^{(2)}(t),\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}(t)$为列向量的 n 阶方阵，则(1)的任一解都可表为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(0)\boldsymbol{\varphi}(0)+\int_0^t \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

即

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{\varphi}(0)+\int_0^t \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由 1)知 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是以 ω 为周期的解的充要条件是$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\varphi}(\omega)$. 因此

$$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{X}(0)\boldsymbol{\varphi}(0)+\int_0^t \boldsymbol{X}(\omega)\boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

亦即 $\boldsymbol{\varphi}(0)$由下述方程确定

$$(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{X}(\omega))\boldsymbol{\varphi}(0)=\int_0^\omega \boldsymbol{X}(\omega)\boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中 $\boldsymbol{E}_n$ 是 n 阶单位矩阵. 此式能确定惟一 $\boldsymbol{\varphi}(0)$ 的充要条件是

$$|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{X}(\omega)|\neq 0$$

即矩阵 $\boldsymbol{X}(\omega)$ 没有等于 1 的特征根. 证毕.

【417】 若 $\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{f}(t)$ 分别是以 ω 为周期的连续的 $n\times n$ 矩阵函数和维列向量函数. 试证: 方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$$

有惟一的以 ω 为周期的周期解的充要条件是对应的齐次方程组不存在非零周期解.

证 记

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{2}$$

$\boldsymbol{X}(t)$ 表示方程组(2)的满足 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}$(其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵)的基解矩阵. 以下分三个步骤来证明:

1) 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是(1)的解, 则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是以 ω 为周期的充要条件是 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\varphi}(\omega)$;

2) (1)有惟一周期解(周期为 ω)的充要条件是 $\boldsymbol{X}(\omega)$ 没有等于 1 的特征根;

3) $\boldsymbol{X}(\omega)$ 没有等于 1 的特征根的充要条件是(2)没有非零周期解(周期为 ω).

1)和 2)的证明已由上题完成, 下证 3). 事实上, 若 $\boldsymbol{X}(\omega)$ 没有等于 1 的特征根, 则

$$\det(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\omega))\neq 0$$

下设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是(2)的非零周期解,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t)&=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{\varphi}(0)\\ \boldsymbol{\varphi}(t+\omega)&=\boldsymbol{X}(t+\omega)\boldsymbol{\varphi}(0)\end{aligned} \tag{1}$$

从而

$$\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{X}(t+\omega)\boldsymbol{\varphi}(0)$$

令 $t=0$，得

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\omega))\boldsymbol{\varphi}(0)=0$$

故必有 $\boldsymbol{\varphi}(0)=0$. 于是 $\boldsymbol{\varphi}(t)\equiv 0$，得矛盾. 这说明(2)没有非零周期解.

反之，若(2)无非零周期解，下证 $\boldsymbol{X}(\omega)$没有等于 1 的特征根.

事实上，若不然，则有 $\det(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\omega))=0$，从而，$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}(\omega))C=0$ 存在一个非零向量 C^*，使 $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{X}(\omega)C^*$. 此时，若设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是(2)的满足 $\boldsymbol{\varphi}(0)=C^*$ 的解，则有 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}^*$. 从而，

$$\boldsymbol{\varphi}(\omega)=\boldsymbol{X}(\omega)\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{\varphi}(0)$$

因此由 1)可知，$\boldsymbol{\varphi}(t)$是(2)的一个非零周期解. 与假设矛盾，从而证明了 $\boldsymbol{X}(\omega)$没有等于 1 的特征根.

【418】 设 $\boldsymbol{A}(t)=f(t)\begin{pmatrix}a & b\\ c & \mathrm{d}\end{pmatrix}$，其中$\begin{pmatrix}a & b\\ c & \mathrm{d}\end{pmatrix}$是非奇异常矩阵，函数 $f(t)$在$[0,+\infty)$上连续.

1) 验证 $\boldsymbol{x}(t)=\exp\left[\int_0^t \boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\right]\boldsymbol{x}_0$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases} \tag{1}$$

的解；

2) 若方程组$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$具有周期为$\omega$的周期解，那么$f(t)$需满足什么条件?

证 记$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & \mathrm{d} \end{pmatrix}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\left[\int_0^t \boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\right]\boldsymbol{x}_0\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\left[\boldsymbol{B}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]\boldsymbol{x}_0\right]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{B}^n\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]^n+\cdots\right]\boldsymbol{x}_0$$

$$=\left\{\boldsymbol{B}f(t)+\boldsymbol{B}^2 f(t)\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{B}^n f(t)\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]^{n-1}+\cdots\right\}\boldsymbol{x}_0$$

$$=\boldsymbol{B}f(t)\left\{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{B}^{n-1}\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]^{n-1}+\cdots\right\}\boldsymbol{x}_0$$

$$=\boldsymbol{A}(t)\exp\left[\boldsymbol{B}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]\boldsymbol{x}_0$$

又因为

$$\boldsymbol{x}(0)=\exp[0]\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_0$$

所以

$$\boldsymbol{x}(t)=\exp\left[\int_0^t \boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\right]\boldsymbol{x}_0$$

是初值问题(1)的解.

2) 设$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$具有周期为$\omega$的周期解$\boldsymbol{\varphi}(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}=f(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varphi}$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)}{\mathrm{d}t}=f(t+\omega)\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)=f(t+\omega)\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varphi}(t)$$

因此，必有

$$f(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varphi}(t)-f(t+\omega)\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varphi}(t)=0$$

即

$$[f(t)-f(t+\omega)]\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varphi}(t)=0$$

因为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & \mathrm{d}\end{pmatrix}$是非奇异矩阵，$\boldsymbol{\varphi}(t)\neq 0$. 因此

$$[f(t)-f(t+\omega)]=0$$

即当 $f(t)$是以 ω 为周期的周期函数时，原方程组有以 ω 为周期的周期解.

§5.3 常系数齐次线性微分方程组

提 要

常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1}$$

的求解方法

1 基解矩阵的计算公式

定义 1 $n\times n$ 矩阵序列$\{\boldsymbol{A}_k\}$，其中 $\boldsymbol{A}_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$称为收敛于矩阵$\boldsymbol{A}$(当 $k\to\infty$)，如果对于一切 $i,j=1,2,\cdots,n$，数列$\{a_{ij}^{(k)}\}$都是收敛的，即当 $k\to\infty$时，$a_{ij}^{(k)}\to a_{ij}$. 类似地，可以定义矩阵函数序列$\{\boldsymbol{A}_k(t)\}$在区间$[a,b]$上收敛和一致收敛

性.

定义 2　无穷矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k + \cdots$$

称为收敛的，如果它的部分和所成的序列是收敛的. 类似地，可以定义矩阵函数级数在$[a,b]$上的收敛和一致收敛性.

定义 3　如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}}$定义为下列收敛的矩阵级数的和

$$e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} + \cdots$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次幂，规定 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$，$0! = 1$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的，即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，则 $e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{A}} \cdot e^{\boldsymbol{B}}$；对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，$(e^{\boldsymbol{A}})^{-1}$存在，且$(e^{\boldsymbol{A}})^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}}$；如果 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异矩阵，则 $e^{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}} = \boldsymbol{T}^{-1}e^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}$.

定理 1　矩阵函数 $\boldsymbol{X}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$是方程组(1)的基解矩阵，且 $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{E}$.

下面给出基解矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$的计算方法.

定义 4　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

是 λ 的 n 次代数方程，也称为方程组(1)的特征方程. (2)的根称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 或方程组(1)的特征根或特征值. 设 λ 是方程组(1)的特征值，线性代数方程组

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}=0 \tag{3}$$

或

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)C_1+a_{12}C_2+\cdots+a_{1n}C_n=0\\ a_{21}C_1+(a_{22}-\lambda)C_2+\cdots+a_{2n}C_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}C_1+a_{n2}C_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)C_n=0\end{cases} \tag{3$'$}$$

的非零解

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\ \vdots\\C_n\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\mathbf{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

定理 3 若矩阵 $\mathbf{A}$ 有 n 个相异的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{C}_i$ 是 $\mathbf{A}$ 对应于 λ_i 的特征向量，则 $\boldsymbol{C}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 线性无关，且矩阵

$$\boldsymbol{X}(t)=(e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{C}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{C}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{C}_n)$$

是方程组(1)的基解矩阵. 当特征值有复值时，如 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，$\mathbf{C}_{1,2}=\mathbf{C}^{(1)}\pm i\mathbf{C}^{(2)}$ 则 $e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{C}_1$，$e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{C}_2$ 可换成以下两个实解

$$e^{\alpha t}(\mathbf{C}^{(1)}\cos\beta t-\mathbf{C}^{(2)}\sin\beta t)$$
$$e^{\alpha t}(\mathbf{C}^{(1)}\sin\beta t+\mathbf{C}^{(2)}\cos\beta t)$$

定理 3′ 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{C}_i=\begin{pmatrix}c_{1i}\\c_{2i}\\ \vdots\\c_{ni}\end{pmatrix}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

对应特征值 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$(不必各不相同)，则矩阵

$$\boldsymbol{X}(t)=(e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{C}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{C}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{C}_n)$$

是方程组(1)的基解矩阵.

定理 4　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值，它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，这里 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 对于每一个 n_j 重特征值 λ_j，线性代数方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{C}=0 \tag{4}$$

具有 n_j 个线性无关的解 $\boldsymbol{C}_j^{(1)}\cdots\boldsymbol{C}_j^{(n_j)}$(称为 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_j 的广义特征向量). 因而(4)式的解的全体构成一个 n_j 维子空间 $U_j(j=1,2,\cdots,k)$,并且 n 维线性空间 U 可以表示为这些空间 $U_j(j=1,2,\cdots,k)$的直和，即对任一向量 $\boldsymbol{v}\in U$，存在惟一的 $\boldsymbol{u}_j\in U_j(j=1,2,\cdots,k)$,使得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_k \tag{5}$$

则方程组(1)的基解矩阵为

$$e^{\boldsymbol{A}t}=(e^{\boldsymbol{A}t})\boldsymbol{E}=(e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{e}_1,\cdots,e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{e}_n)$$

其中

$$\boldsymbol{e}_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow 第\ i\ 行\quad(i=1,\cdots,n)$$

$\boldsymbol{e}_i$ 可由(5)式确定，而

$$e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{e}_i=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[\sum_{l=0}^{j-1}\frac{t^l}{l!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^l\right]\boldsymbol{e}_i$$

特别当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值 λ 时

$$e^{At}=e^{\lambda t}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{t^l}{l!}(A-\lambda E)^l$$

2　待定系数法

对于方程组(1)有时用以下的待定系数法求解比较方便，先求出矩阵 A 的各相异的特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,k)$和它们的重数 n_i，而对于每个特征值 λ_i，方程组(1)必有下列形式的 n_i 个线性无关解

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(c_{11}+c_{12}t+\cdots+c_{1n_i}t^{n_i-1})e^{\lambda_i t}\\ \vdots\\ (c_{n1}+c_{n2}t+\cdots+c_{nn_i}t^{n_i-1})e^{\lambda_i t}\end{pmatrix}\tag{6}$$

将(6)代入方程组(1)，比较 t 的同次幂系数，一般可以确定 C_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$，所有这些结合起来，即为方程组(1)的基本解组.

3　算子解法

引进微分算子 $D=\frac{d}{dt}$之后，类似于高阶线性微分方程，也可用消元法求解常系数线性微分方程组.

题　　解

求解下列方程组(习题 419～习题 449)

【419】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\ \dfrac{dy}{dt}=2y\end{cases}$

解　系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

的特征方程是

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)=0$$

特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$.

相应于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=1$，$b=0$.

相应于 $\lambda_2=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=0$，$b=1$.

由此得方程组的通解

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

这里 C_1,C_2 为任意常数(注：以后不再对 C_1,C_2 是任意常数加以说明)，方程组的基解矩阵为

$$e^{At}=\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}.$$

【420】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5y+4z\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=4y+5z\end{cases}$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

的特征方程是

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(9-\lambda)=0$$

求得特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=9$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=1$，$b=-1$.

相应于 $\lambda_2=9$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b=1$

由此得方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}=C_1e^{x}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+C_2e^{9x}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

【421】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x+y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3x+4y\end{cases}$

解 系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

求得特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=5$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

解之，得 $a=-b$. 取 $a=1$，$b=-1$.

相应于 $\lambda_2=5$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

解之，得 $b=3a$. 取 $a=1$，$b=3$.

由此得该方程组的通解

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

【422】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x+4y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=5x+2y\end{cases}$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}3-\lambda&4\\5&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-7)=0$$

解之得特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=7$.

相应于 $\lambda_1=-2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $b=-\frac{5}{4}a$. 所以，特征向量可取为

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=7$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&4\\5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=b$. 所以，特征向量可取为

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

由此得该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}+C_2e^{7t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

【423】 $\begin{cases}2\dot{x}-5\dot{y}=4y-x\\3\dot{x}-4y=2x-y\end{cases}$

解 把方程组改写为

$$\dot{x}=2x-3y \qquad \dot{y}=x-2y$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda&-3\\1&-2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0$$

解之，得特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=3b$. 不妨取 $b=1$，则 $a=3$. 那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}3 & -3\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

解之，得 $a=b$. 不妨取 $a=b=1$. 那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

【424】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-3x\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=8x-y\end{cases}$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\8 & -1\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda E})=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 8 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+5)=0$$

解之得特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=5$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 8 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=4a$. 不妨取 $a=1$，则 $b=4$. 那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-5$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=-2a$. 不妨取 $a=1$，则 $b=-2$. 那么对应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-5t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

于是,该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+C_2e^{-5t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

【425】 $\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=3y-2x\end{cases}$

解 系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+5=0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=2+i$，$\lambda_2=2-i$.

相应于 $\lambda_1=2+i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-(2+i)\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-i & 1\\ -2 & 1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=(1+i)a$. 不妨取 $a=1$，则 $b=1+i$. 那么对应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{(2+i)t}\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t+i\sin t\\ (\cos t-\sin t)+i(\cos t+\sin t)\end{pmatrix}$$

由此得 $\lambda_1=2+i$ 所对应的实解为

$$\begin{cases}x_1(t)=e^{2t}\cos t\\ y_1(t)=e^{2t}(\cos t-\sin t)\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}x_2(t)=e^{2t}\sin t\\ y_2(t)=e^{2t}(\cos t+\sin t)\end{cases}$$

它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 从而，得到该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}.$$

【426】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y\end{cases}$

解　系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=1+i$，$\lambda_2=1-i$.

相应于 $\lambda_1=1+i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=-ia$. 不妨取 $a=1$，则 $b=-i$. 那么对应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}\cos t+i\sin t\\ \sin t-i\cos t\end{pmatrix}$$

取它的实部的虚部，可得两个实值解

$$\begin{cases}x_1=e^t\cos t\\ y_1=e^t\sin t\end{cases},\qquad \begin{cases}x_2=e^t\sin t\\ y_2=-e^t\cos t\end{cases}$$

易知它们在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关. 因此，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}.$$

【427】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=x-5y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y\end{cases}$

解 系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 5\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+9=0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=3i$，$\lambda_2=-3i$.

相应于 $\lambda_1=3i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(A-3iE)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3i & -5\\ 2 & -1-3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=\frac{1}{2}(1+3i)b$. 不妨取 $b=1$, 则 $a=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. 那么对应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{i3t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos3t-\frac{3}{2}\sin3t\\ \cos3t\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\cos3t+\frac{1}{2}\sin3t\\ \sin3t\end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部，可得两实值解

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\cos3t-\frac{3}{2}\sin3t\\ y_1=\cos3t\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=\frac{3}{2}\cos3t+\frac{1}{2}\sin3t\\ y_2=\sin3t\end{cases}$$

易知它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos3t-\frac{3}{2}\sin3t\\ \cos3t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\cos3t+\frac{1}{2}\sin3t\\ \sin3t\end{pmatrix}.$$

【428】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+5x+y=0\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2x+3y=0\end{cases}$

解 整理可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-5x-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x-3y\end{cases}$$

其系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -1\\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+8\lambda+17=0$$

求得特征值 $\lambda_1=-4+i$，$\lambda_2=-4-i$.

相应于 $\lambda_1=-4+i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-(-4+i)\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-i & -1\\ 2 & 1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=-(1+i)a$. 不妨取 $a=1$，则 $b=-(1+i)$. 那么对应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{-4t}(\cos t+i\sin t)\begin{pmatrix}1\\ -1-i\end{pmatrix}$$

$$=e^{-4t}\begin{pmatrix}\cos t+i\sin t\\ \sin t-\cos t-i(\cos t+\sin t)\end{pmatrix}$$

取其实部和虚部可得两实解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

它们在$(-\infty, +\infty)$上线性无关. 于是，求得该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

【429】 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ay \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ax \end{cases} \quad (a \neq 0)$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a^2 = 0$$

因为 $a \neq 0$，可得特征值为 $\lambda_1 = ai$，$\lambda_2 = -ai$.

相应于特征值 $\lambda_i = ai$ 的特解形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{iat}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

η_1，η_2 应满足方程组

$$\begin{pmatrix} -ai & a \\ -a & -ai \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$$

即

$$\begin{cases} -ai\eta_1 + a\eta_2 = 0 \\ -a\eta_1 - ai\eta_2 = 0 \end{cases}$$

解之得 $\eta_2 = i\eta_1$. 不妨令 $\eta_1 = 1$，则 $\eta_2 = i$. 于是，相应的特解为

$$x = e^{iat}, \qquad y = ie^{iat}$$

或 $x = \cos at + i\sin at$，$y = -\sin at + i\cos at$

取上述复值解的实部与虚部，可得方程组在$(-\infty, +\infty)$上的两个线性无关的实解

$$\begin{cases} x_1 = \cos at \\ y_1 = -\sin at \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = \sin at \\ y_2 = \cos at \end{cases}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos at \\ -\sin at \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin at \\ \cos at \end{pmatrix}.$$

【430】 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha y \end{cases} \qquad (\beta \neq 0)$$

解 系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ -\beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$，$\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

相应于 $\lambda = \alpha + i\beta$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-(\alpha+i\beta)\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\beta & \beta\\-\beta & -i\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即

$$\begin{cases}-i\beta a+\beta b=0\\-\beta a-i\beta b=0\end{cases}$$

解之得 $b=ia$. 不妨令 $a=1$，则 $b=i$. 那么相应的特解为

$$e^{(\alpha+i\beta)t}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$

故特征值 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ 所对应的实解为

$$\begin{cases}x_1=e^{\alpha t}\cos\beta t\\y_1=-e^{\alpha t}\sin\beta t\end{cases},\qquad\begin{cases}x_2=e^{\alpha t}\sin\beta t\\y_2=e^{\alpha t}\cos\beta t\end{cases}$$

这两个解在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 于是，得方程组的通解

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t\\-\sin\beta t\end{pmatrix}+C_2e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\sin\beta t\\\cos\beta t\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{cases}x=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)\\y=e^{\alpha t}(-C_1\sin\beta t+C_2\cos\beta t).\end{cases}$$

【431】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x+y\\\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3y\end{cases}$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2=0$$

解之得特征值为 $\lambda_{1,2}=3$(二重).

运用待定系数法，方程组有如下形式的解

$$x=(r_{11}+r_{12}t)e^{3t}$$
$$y=(r_{21}+r_{22}t)e^{3t}$$

代入原方程组得

$$\begin{cases}3e^{3t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{3t}\cdot r_{12}=3e^{3t}(r_{11}+r_{12}t)+(r_{21}+r_{22}t)e^{3t}\\ 3e^{3t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{3t}\cdot r_{22}=3e^{3t}(r_{21}+r_{22}t)\end{cases}$$

消去 e^{3t}后比较 t 的同次幂系数，可得

$r_{12}=r_{21}$，$r_{22}=0$，r_{11}可以取任意值

取 $r_{11}=1$，$r_{12}=r_{21}=0$，则对应于 $\lambda=3$ 的一个特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$，$r_{12}=r_{21}=1$，则可得另一个特解

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$$

易知，这两个解在$(-\infty,+\infty)$上是线性无关的. 所以，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}.$$

【432】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases}$

解 系数矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2=0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$.

相应于 $\lambda_{1,2}=2$，方程组有如下形式的解

$$x=(r_{11}+r_{12}t)e^{2t}\qquad y=(r_{21}+r_{22}t)e^{2t}$$

将其代入方程组可得

$$2e^{2t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{2t}r_{12}=e^{2t}(r_{11}+r_{12}t)-e^{2t}(r_{21}+r_{22}t)$$

$$2e^{2t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{2t}r_{22}=e^{2t}(r_{11}+r_{12}t)+3e^{2t}(r_{21}+r_{22}t)$$

消去 e^{2t} 后比较 t 的同次幂系数得

$$r_{11}+r_{12}+r_{21}=0,$$

$$r_{12}+r_{22}=0,$$

$$r_{11}+r_{21}-r_{22}=0$$

于是，$-r_{12}=r_{22}=r_{11}+r_{21}$

取 $r_{11}=1$，$r_{21}=0$，则 $r_{22}=1$，$r_{12}=-1$. 那么相应于 $\lambda_{1,2}=2$ 的一个特解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-t)e^{2t}\\ te^{2t}\end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$，$r_{21}=1$，则 $r_{22}=1$，$r_{12}=-1$. 那么可得另一个特解

$$\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-te^{2t}\\ (1+t)e^{2t}\end{pmatrix}$$

易知，这两个解在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关. 所以，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1-t\\ t\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}-t\\ 1+t\end{pmatrix}.$$

【433】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+5x+y=0\\ \dfrac{dy}{dt}+3y-x=0\end{cases}$

解 整理可得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=-5x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y\end{cases}$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+8\lambda+16=(\lambda+4)^2=0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-4$.

对应于 $\lambda_{1,2}=-4$，方程组有如下形式的解

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{-4t}\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}t\\ r_{21}+r_{22}t\end{pmatrix}$$

将其代入原方程组可得

$$-4e^{-4t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{-4t}r_{12}$$
$$=-5e^{-4t}(r_{11}+r_{12}t)-e^{-4t}(r_{21}+r_{22}t)$$
$$-4e^{-4t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{-4t}r_{22}$$
$$=e^{-4t}(r_{11}+r_{12}t)-3e^{-4t}(r_{21}+r_{22}t)$$

消去 e^{-4t} 后比较 t 的同次幂系数可得

$$r_{12}=-r_{11}+r_{21},\qquad r_{12}+r_{22}=0$$
$$r_{11}=-r_{21}+r_{22},\qquad r_{12}+r_{22}=0$$

解之得

$$r_{11}=-r_{21}+r_{22}, \qquad r_{12}=-r_{22}$$

取 $r_{21}=-1$，$r_{22}=0$，则 $r_{11}=1$，$r_{12}=0$. 那么相应于 $\lambda_{1,2}=-4$ 的一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

取 $r_{21}=0$，$r_{22}=1$，则 $r_n=1$，$r_{12}=-1$. 那么另一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=e^{-4t}\begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

易知，它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 所以，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2e^{-4t}\begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}.$$

【434】 $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-2y-z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y-x+z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x-z \end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(2-\lambda)=0$$

解之得特征值 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$.

相应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

即 $a=c$，$b=0$. 不妨将其取为

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-1&2&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

即 $a=0$，$c=-2b$. 不妨将其取为

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-1&-1&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

即 $a=3c$，$b=-2c$. 不妨将其取为

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

于是，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

【435】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-y+z\\\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+2y-z\\\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x-y+2z\end{cases}$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&1\\1&2-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0$$

解之得特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=0$，$b=c$. 不妨取 $b=c=1$. 那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b=c$. 不妨取 $a=b=c=1$. 那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_3=3$ 的特征向量应满足

$$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=c$，$b=0$. 不妨取 $a=c=1$. 那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

【436】 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y - z \end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征方程

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

解之得特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 2$.

相应于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=0$，$c=2a$. 不妨取 $a=1$，$c=2$. 那么对应的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b=2c$. 不妨取 $a=b=2$，$c=1$. 那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

解之得 $c=0$，$b=2a$. 不妨取 $a=1$，$b=2$. 那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

易知它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 于是，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

【437】
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -5x-10y-20z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 5x+5y+10z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2x+4y+9z \end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & -10 & -20 \\ 5 & 5-\lambda & 10 \\ 2 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3+9\lambda^2-25\lambda+25 \\ &= -(\lambda-5)(\lambda^2-4\lambda+5)=0 \end{aligned}$$

解之得特征值 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=2+i$，$\lambda_3=2-i$.

相应于 $\lambda_1=5$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-10 & -10 & -20\\5 & 0 & 10\\2 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=-2c$，$b=0$. 取 $c=1$，则 $a=-2$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^{5t}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=2+i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-7-i & -10 & -20\\5 & 3-i & 10\\2 & 4 & 7-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=(1+i)b$，$c=-\dfrac{2}{5}(2+i)b$. 取 $b=5$,则 $a=5+5i$，$c=-4-2i$. 那么，对应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{(2+i)t}\begin{pmatrix}5+5i\\5\\-4-2i\end{pmatrix}=e^{2t}(\cos t+i\sin t)\begin{pmatrix}5+5i\\5\\-4-2i\end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部可得方程组的两个实解

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}5(\cos t-\sin t)\\5\cos t\\-2(2\cos t-\sin t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 5(\cos t + \sin t) \\ 5\sin t \\ -2(2\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$

易知，它们在$(-\infty, +\infty)$上是线性无关的. 于是，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 5(\cos t - \sin t) \\ 5\cos t \\ -4\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

$$+ C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 5(\cos t + \sin t) \\ 5\sin t \\ -2\cos t - 4\sin t \end{pmatrix}.$$

【438】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + z \end{cases}$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i$，$\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b=c$. 取 $a=b=c=1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=1+\sqrt{3}i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{3}i & 1 & -1\\ -1 & -\sqrt{3}i & 1\\ 1 & -1 & -\sqrt{3}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}c$，$b=-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}c$. 取 $c=2$,则 $a=-1+\sqrt{3}i$，$b=-1-\sqrt{3}i$. 那么相应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{(1+\sqrt{3}i)t}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3}i\\-1-\sqrt{3}i\\2\end{pmatrix}$$

$$=e^t\begin{pmatrix}(-\cos\sqrt{3}t-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)+i(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t-\sin\sqrt{3}t)\\(-\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)+i(-\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t-\sin\sqrt{3}t)\\2\cos\sqrt{3}t+i\sin\sqrt{3}t\end{pmatrix}$$

分别取它的实部和虚部，可得两个实值解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ -\cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix} e^t$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ 2\sin\sqrt{3}t \end{pmatrix} e^t$$

因此，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ -\cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

$$+ C_3 e^t \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ 2\sin\sqrt{3}t \end{pmatrix}.$$

【439】

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = y + z & (1) \\ \dot{y} + \dot{z} = z + x & (2) \\ \dot{z} + \dot{x} = x + y & (3) \end{cases}$$

解　记这三个方程依次为(1)，(2)，(3)．将这三个方程相加得

$$\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = x + y + z \qquad (4)$$

(4) − (1)得　$\dot{z} = x$　(5)

(4) − (2)得　$\dot{x} = y$　(6)

(4) - (3)得 $$\dot{y}=z \tag{7}$$

只需求解由方程(5)、(6)、(7)组成的新的方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=z\\ \dot{z}=x\end{cases}$$

系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

特征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=1-\lambda^3=0$$

求得特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\lambda_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b=c$. 取 $a=b=c=1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

的解，这里 a，b，c 应满足

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & 1\\ 1 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a$，$c=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}a$. 取 $a=1$，则 $b=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$c=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 那么相应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{pmatrix}$$

$$=e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{pmatrix}=e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+i\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+i\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部,可得两个实解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}=e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$$

易知上述三解在$(-\infty,+\infty)$上是线性无关的. 于是,原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$$

$$+C_3e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{pmatrix}.$$

【440】 $$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1+x_2\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_2\\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=x_1-4x_3\end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\1&0&-4\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\0&-1-\lambda&0\\1&0&-4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+4)(\lambda+1)^2=0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=-4$，$\lambda_{2,3}=-1$.

相应于 $\lambda_1=-4$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b=0$. c 可取任意值. 因此，不妨将特征向量取为

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_{2,3}=-1$，可以计算出

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

因此，方程$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{r}=0$ 有两个线性无关解为

$$\boldsymbol{r}_{10} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{r}_{11} = (\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_{21} = (\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

这样，方程组的基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3e^{-t} & 9te^{-t} \\ 0 & 0 & 9e^{-t} \\ e^{-4t} & e^{-t} & (-1+3t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

所求的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 9t \\ 9 \\ -1+3t \end{pmatrix}.$$

【441】 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + y - z \end{cases}$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$$

求得特征值为 $\lambda_1 = 1$（单根）$\lambda_2 = -2$（二重根）.

相应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

可取 $a = b = c = 1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$ 时，方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}t \\ r_{21} + r_{22}t \\ r_{31} + r_{32}t \end{pmatrix}$$

的解，将其代入方程组得

$$-2e^{-2t}(r_{11} + r_{12}t) + e^{-2t}r_{12}$$
$$= -e^{-2t}(r_{11} + r_{12}t) + e^{-2t}(r_{21} + r_{22}t) + e^{-2t}(r_{31} + r_{32}t)$$

$$-2e^{-2t}(r_{21} + r_{22}t) + e^{-2t}r_{22}$$
$$= e^{-2t}(r_{11} + r_{12}t) - e^{-2t}(r_{21} + r_{22}t) + e^{-2t}(r_{31} + r_{32}t)$$

$$-2e^{-2t}(r_{31} + r_{32}t) + e^{-2t}r_{32}$$
$$= e^{-2t}(r_{11} + r_{12}t) + e^{-2t}(r_{21} + r_{22}t) - e^{-2t}(r_{31} + r_{32}t)$$

消去 e^{-2t} 得

$$r_{12} - r_{11} - r_{12}t = r_{21} + r_{22}t + r_{31} + r_{32}t$$
$$r_{22} - r_{21} - r_{22}t = r_{11} + r_{12}t + r_{31} + r_{32}t$$
$$r_{32} - r_{31} - r_{32}t = r_{11} + r_{12}t + r_{21} + r_{22}t$$

令 t 的同次幂系数相等得

$$r_{12} = r_{22} = r_{32} = r_{11} + r_{21} + r_{31}$$
$$r_{12} + r_{22} + r_{32} = 0$$

解之得 $r_{12} = r_{22} = r_{32} = 0$，$r_{11} = -r_{21} - r_{31}$.

不妨取 $r_{21} = -1$，$r_{31} = 0$，则 $r_{11} = 1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $r_{21}=0$，$r_{31}=-1$，则 $r_{11}=1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

这三个解在$(-\infty, +\infty)$上线性无关. 于是，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

【442】 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-1$（二重）.

相应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之可得 $a=b=c$. 令 $a=b=c=1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$(二重)，方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}t\\r_{21}+r_{22}t\\r_{31}+r_{32}t\end{pmatrix}$$

的特解，将其代入方程组可得

$$-e^{-t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{-t}r_{12}=e^{-t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{-t}(r_{31}+r_{32}t),$$

$$-e^{-t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{-t}r_{22}=e^{-t}(r_{31}+r_{32}t)+e^{-t}(r_{11}+r_{12}t),$$

$$-e^{-t}(r_{31}+r_{32}t)+e^{-t}r_{32}=e^{-t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{-t}(r_{21}+r_{22}t)$$

消去 e^{-t} 后得

$$-(r_{11}+r_{12}t)+r_{12}=(r_{21}+r_{22}t)+(r_{31}+r_{32}t)$$

$$-(r_{21}+r_{22}t)+r_{22}=(r_{31}+r_{32}t)+(r_{11}+r_{12}t)$$

$$-(r_{31}+r_{32}t)+r_{32}=(r_{11}+r_{12}t)+(r_{21}+r_{22}t)$$

令 t 的同次幂系数相等，可得

$$r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{12}=0,\ r_{22}+r_{32}+r_{12}=0$$

$$r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{22}=0,\quad r_{22}+r_{32}+r_{12}=0$$

$$r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{32}=0,\quad r_{22}+r_{32}+r_{12}=0$$

解之，得

$$r_{12}=r_{22}=r_{32}=0,\qquad r_{11}=-(r_{21}+r_{31})$$

取 $r_{21}=-1$，$r_{31}=0$，则 $r_{11}=1$. 那么相应的一个特解为

$$e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{21}=0$，$r_{31}=-1$，则 $r_{11}=1$. 那么相应的另一个特解为

$$e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

易知它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 因此，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

【443】
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-y-z\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x-y-2z\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2z-x+y\end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & -1\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ -1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3=0$$

解得特征值为 $\lambda_1=1$（三重）. 那么方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2\\ r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2\\ r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2\end{pmatrix}$$

的解，将其代入方程组得

$$\begin{aligned}&e^t(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+e^t(r_{12}+2r_{13}t)=2e^t(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)\\&\qquad-e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)-e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),\\&e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+e^t(r_{22}+2r_{23}t)=2e^{2t}(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)\\&\qquad-e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)-2e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),\\&e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)+e^t(r_{32}+2r_{33}t)=2e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)\\&\qquad-e^t(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)\end{aligned}$$

消去 e^t 并整理可得

$$\begin{aligned}&r_{11}-r_{21}-r_{31}-r_{12}+(r_{12}-r_{22}-r_{32}-2r_{13})t\\&\qquad+(r_{13}-r_{23}-r_{33})t^2=0,\\&2r_{11}-2r_{21}-2r_{31}-r_{22}+(2r_{12}-2r_{22}-2r_{32}-2r_{23})t\\&\qquad+2(r_{13}-r_{23}-r_{33})t^2=0\\&r_{31}-r_{11}+r_{21}-r_{32}+(r_{32}-r_{12}+r_{22}-2r_{33})t\\&\qquad+(r_{33}-r_{13}+r_{23})t^2=0\end{aligned}$$

比较 t 的同次幂系数后得

$$r_{11}-r_{21}-r_{31}-r_{12}=0,\quad r_{12}-2r_{13}-r_{22}-r_{32}=0,\quad r_{13}-r_{23}-r_{33}=0$$

$$2r_{11}-2r_{21}-2r_{31}-r_{22}=0,\quad r_{12}-r_{23}-r_{22}-r_{32}=0,\quad r_{13}-r_{23}-r_{33}=0$$

$$r_{11}-r_{21}-r_{31}+r_{32}=0,\quad r_{12}+2r_{33}-r_{22}-r_{32}=0,\quad r_{13}-r_{23}-r_{33}=0$$

解之得

$$r_{12}=r_{11}-r_{21}-r_{31}, \qquad r_{22}=2(r_{11}-r_{21}-r_{31})$$

$$r_{32}=-(r_{11}-r_{21}-r_{31}), \quad r_{13}=r_{23}=r_{33}=0$$

取 $r_{11}=1$，$r_{21}=r_{31}=0$,则 $r_{12}=1$，$r_{22}=2$，$r_{32}=-1$. 那么相应的一个解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$$

取 $r_{21}=-1$，$r_{11}=r_{31}=0$，则 $r_{12}=1$，$r_{22}=2$，$r_{32}=-1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix} t \\ -1+2t \\ -t \end{pmatrix}$$

取 $r_{31}=-1$，$r_{11}=r_{21}=0$，则 $r_{12}=1$，$r_{22}=2$，$r_{32}=-1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -1-t \end{pmatrix}$$

易知这三个解在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 于是，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix} t \\ -1+2t \\ -t \end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -1-t \end{pmatrix}.$$

【444】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+x-2z=0 \\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}+x=0 \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+x+2y=0 \end{cases}$

解 整理可得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=-y-z \\ \dfrac{dz}{dt}=-z \end{cases}$$

系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-(1+\lambda)^3=0$$

求得特征值为 $\lambda_1=-1$（三重）.

相应于 $\lambda_1=-1$，方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix} r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2 \\ r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2 \\ r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2 \end{pmatrix}$$

的特解，将其代入方程组得

$$-e^{-t}(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+e^{-t}(r_{12}+2r_{13}t)$$
$$=-e^{-t}(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)-e^{-t}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2),$$
$$-e^{-t}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+e^{-t}(r_{22}+2r_{23}t)$$
$$=-e^{-t}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)-e^{-t}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),$$
$$-e^{-t}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)+e^{-t}(r_{32}+2r_{33}t)$$
$$=-e^{-t}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)$$

消去 e^{-t}后整理可得

$$r_{12}+2r_{13}t=-(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)$$
$$r_{22}+2r_{23}t=-(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)$$
$$r_{32}+2r_{33}t=0$$

令 t 的同次幂系数相等，可得

$r_{23}=r_{32}=r_{33}=0$，$r_{12}=-r_{21}$，$2r_{13}=-r_{22}$，$r_{32}=-r_{22}$，r_{11} 可以任取.

取 $r_{11}=1$，$r_{12}=-r_{21}=0$，$r_{31}=2r_{13}=-r_{22}=0$. 那么相应的一个特解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$，$r_{12}=-r_{21}=1$，$r_{22}=0$，则 $r_{31}=2r_{13}=0$. 那么相应的一个特解为

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}t\\-1\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$，$r_{12}=-r_{21}=0$，$r_{22}=-2$，则 $r_{31}=2r_{13}=2$. 那么相应的特解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

易证，它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

【445】 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{3}z \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}z \\ \dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{1}{3}y + \dfrac{4}{3}z \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3} \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{2}{3}-\lambda & \dfrac{1}{3} \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3 = 0$$

求得特征值为 $\lambda = 1$（三重）.

对于 $\lambda = 1$，方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2 \\ r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2 \\ r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2 \end{pmatrix}$$

的解. 将其代入方程组得

$$e^t(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+e^t(r_{12}+2r_{13}t)=e^t(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+\frac{2}{3}e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)-\frac{2}{3}e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),$$

$$e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+e^t(r_{22}+2r_{23}t)=\frac{2}{3}e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+\frac{1}{3}e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),$$

$$e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)+e^t(r_{32}+2r_{33}t)=-\frac{1}{3}e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+\frac{4}{3}e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)$$

消去 e^t 并整理得

$$r_{12}+2r_{13}t=\frac{2}{3}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)-\frac{2}{3}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),$$

$$r_{22}+2r_{23}t+\frac{1}{3}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)=\frac{1}{3}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),$$

$$r_{32}+2r_{33}t=-\frac{1}{3}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+\frac{1}{3}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)$$

令 t 的同次幂系数相等可得

$$r_{13}=r_{23}=r_{33}=0,\quad r_{22}=r_{32}=-\frac{1}{3}(r_{21}-r_{31})$$

$$r_{12}=\frac{2}{3}(r_{21}-r_{31}),\ r_{11}=r_{11},\quad 即\ r_{11}可任意取值.$$

取 $r_{11}=1$, $r_{21}=r_{31}=0$, 则相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$，$r_{21}=1$，$r_{31}=0$，则相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ 1-\frac{1}{3}t \\ -\frac{1}{3}t \end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$，$r_{21}=0$，$r_{31}=1$，则相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3}t \\ 1+\frac{1}{3}t \end{pmatrix}$$

易知它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 因此，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ 1-\frac{1}{3}t \\ -\frac{1}{3}t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3}t \\ 1+\frac{1}{3}t \end{pmatrix}.$$

【446】 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x+y=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y+z=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+z=0 \end{cases}$

解 整理可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y-z\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-z\end{cases}$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-1-\lambda&-1&0\\0&-1-\lambda&-1\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)^3=0$$

求得特征根为 $\lambda_1=-1$（三重）.

相应于 $\lambda_1=-1$，方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2\\r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2\\r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2\end{pmatrix}$$

的解，将其代入方程组得

$$-e^{-t}(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+e^{-t}(r_{12}+2r_{13}t)=-e^{-t}(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)-e^{-t}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2),$$

$$-e^{-t}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+e^{-t}(r_{22}+2r_{23}t)=-e^{-t}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)-e^{-t}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),$$

$$-e^{-t}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)+e^{-t}(r_{32}+2r_{33}t)=-e^{-t}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2).$$

消去 e^{-t}后整理可得

$$(r_{12}+r_{21})+(2r_{13}+r_{22})t+r_{23}t^2=0$$

$$(r_{22}+r_{31})+(2r_{23}+r_{32})t+r_{33}t^2=0$$

$$r_{32}+2r_{33}t=0$$

令 t 的同次幂系数相等，可得

$$r_{12}+r_{21}=0,\quad 2r_{13}+r_{22}=0,\quad r_{23}=0,$$

$$r_{22}+r_{31}=0,\quad 2r_{23}+r_{32}=0,\quad r_{33}=0,\quad r_{32}=0$$

即有 $r_{21}=-r_{12}$， $r_{22}=-r_{31}=-2r_{13}$， $r_{23}=r_{32}=r_{33}=0$，

r_{11}，r_{12}，r_{13}可任意选取

取 $r_{11}=0$，$r_{13}=0$，$r_{12}=1$，则 $r_{21}=-1$，$r_{22}=0$，$r_{23}=0$，$r_{31}=r_{32}=r_{33}=0$. 那么相应的一个解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}t\\-1\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$，$r_{13}=1$，$r_{12}=0$，则 $r_{21}=0$，$r_{22}=-2$，$r_{23}=0$，$r_{31}=2$，$r_{32}=r_{33}=0$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}t^2\\-2t\\2\end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=1$，$r_{12}=0$，$r_{13}=0$，那么相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

易知它们在$(-\infty,+\infty)$上是线性无关的. 因此，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}t\\-1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}t^2\\-2t\\2\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

【447】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y+2z\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2z\\ \dfrac{dz}{dt}=z\end{cases}$

解　系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\-1&0&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\-1&-\lambda&-2\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$$

求得特征值 $\lambda_1=1$ (三重).

对于 $\lambda_1=1$，方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2\\r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2\\r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2\end{pmatrix}$$

的解，代入方程组得

$e^t(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+e^t(r_{12}+2r_{13}t)=2e^t(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+2e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)$,

$e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+e^t(r_{22}+2r_{23}t)=-e^t(r_{11}+r_{12}t+$

$r_{13}t^2)-2e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)$,

$e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)+e^t(r_{32}+2r_{33}t)=e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)$.

消去 e^t 后整理可得

$$(r_{12}+2r_{13}t)-(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)-(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)-2(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)=0,$$

$$(r_{22}+2r_{23}t)+(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+2(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)=0,$$

$$r_{32}+2r_{33}t=0.$$

比较 t 的同次幂系数，可得

$$r_{32}=r_{33}=0,\quad r_{13}=-r_{23}=r_{12}+r_{22}=0$$

$$r_{11}=r_{12}-r_{21}-2r_{31}$$

$$r_{13}=r_{23}=0,\quad r_{12}=-r_{22}$$

取 $r_{12}=1$，$r_{21}=r_{31}=0$，则 $r_{11}=1$，$r_{22}=-1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1+t\\-t\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{12}=0$，$r_{21}=1$，$r_{31}=0$，则 $r_{11}=-1$，$r_{22}=0$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{12}=0$，$r_{21}=0$，$r_{31}=1$，则 $r_{11}=-2$，$r_{22}=0$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

易知它们在$(-\infty, +\infty)$上线性无关．于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

【448】 $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_2 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 2y_3 \end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0$$

求得特征值$\lambda = 2$(三重)．因而方程组有形如

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}x + r_{13}x^2 \\ r_{21} + r_{22}x + r_{23}x^2 \\ r_{31} + r_{32}x + r_{33}x^2 \end{pmatrix}$$

的解，将其代入方程组得

$$2e^{2x}(r_{11}+r_{12}x+r_{13}x^2)+e^{2x}(r_{12}+2r_{13}x)$$
$$=2e^{2x}(r_{11}+r_{12}x+r_{13}x^2)+e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2),$$
$$2e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2)+e^{2x}(r_{22}+2r_{23}x)$$
$$=2e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2),$$
$$2e^{2x}(r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2)+e^{2x}(r_{32}+2r_{33}x)$$
$$=2e^{2x}(r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2)$$

消去 e^{2x}后整理得

$$r_{12}+2r_{13}x=r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2$$
$$r_{22}+2r_{23}x=0$$
$$r_{32}+2r_{33}x=0$$

令 x 的同次幂系数相等，即有

$r_{12}=r_{21}$，$2r_{13}=r_{22}=0$，$r_{33}=r_{23}=r_{32}=0$，r_{11},r_{12},r_{31}可以任意选取

取 $r_{11}=1$，$r_{12}=0$，$r_{31}=0$，那么相应的解为

$$e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$，$r_{12}=1$，$r_{31}=0$，那么相应的解为

$$e^{2x}\begin{pmatrix}x\\1\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$，$r_{12}=0$，$r_{31}=1$，那么相应的解为

$$e^{2x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

易知这三个解在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 于是，该方程组的通解

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

【449】 $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 2y_3 \end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0$$

求得特征值 $\lambda = 2$(三重).

相应于 $\lambda = 2$，方程组有如下形式的解

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}x + r_{13}x^2 \\ r_{21} + r_{22}x + r_{23}x^2 \\ r_{31} + r_{32}x + r_{33}x^2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

将其代入方程组得

$$2e^{2x}(r_{11} + r_{12}x + r_{13}x^2) + e^{2x}(r_{12} + 2r_{13}x)$$

$$=2e^{2x}(r_{11}+r_{12}x+r_{13}x^2)+e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2),$$

$$2e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2)+e^{2x}(r_{22}+2r_{23}x)$$

$$=2e^{2x}(r_{21}+r_{22}+r_{23}x^2)+e^{2x}(r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2),$$

$$2e^{2x}(r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2)+e^{2x}(r_{32}+2r_{33}x)$$

$$=2e^{2x}(r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2)$$

消去 e^{2x} 后整理可得

$$r_{12}+2r_{13}x=r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2,$$

$$r_{22}+2r_{23}x=r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2,$$

$$r_{32}+2r_{33}x=0$$

即有

$$r_{12}=r_{21},\quad 2r_{13}=r_{22}=r_{31},\quad 2r_{23}=r_{32}=r_{33}=0,$$

r_{11}可以任意取值. 取 $r_{11}=1$, $r_{12}=0$, $r_{31}=0$, 则 $r_{21}=0$, $r_{13}=r_{22}=0$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{pmatrix}=e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$, $r_{12}=1$, $r_{31}=0$, 则 $r_{21}=1$, $r_{13}=r_{22}=0$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(2)} \end{pmatrix}=e^{2x}\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $r_{11}=0$, $r_{12}=0$, $r_{31}=1$, 则 $r_{22}=1$, $r_{13}=\frac{1}{2}$, $r_{22}=1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \\ y_3^{(3)} \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

易知这三个解在$(-\infty, +\infty)$上线性无关. 于是方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

【450】 给定方程组

$$\begin{cases} x_1'' - 3x_1' + 2x_1 + x_2' - x_2 = 0 \\ x_1' - 2x_1 + x_2' + x_2 = 0 \end{cases}$$

1）试证上面方程组等价于方程组 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$，其中

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2）试求原方程组满足初值条件

$$x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

的解

证　1）令 $x_1 = u_1, x_1' = u_2$，$x_2 = u_3$，于是原方程组等价为

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -4u_1 + 4u_2 + 2u_3 \\ u_3' = 2u_1 - u_2 - u_3 \end{cases} \tag{1}$$

显然，后一方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

2) 由 1)知原方程组与方程组(1)等价. 因此，只需求方程组(1)的满足初值条件

$$u_1(0)=0,\quad u_2(0)=1,\quad u_3(0)=0$$

的解. 其特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 2\\ 2 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$.

相应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0$$

解之，得 $b=0$，$c=2a$. 令 $a=1$，则 $c=2$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0$$

解之，得 $a=b=2c$. 令 $c=1$，则 $a=b=2$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_3=2$ 时的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&2\\2&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之，得 $b=2a$，$c=0$. 令 $a=1$，则 $b=2$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

于是，(1)的通解为

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

当 $t=0$ 时

$$\begin{pmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\\u_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\0\\2c_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2c_2\\2c_2\\c_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_3\\2c_3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases}c_1+2c_2+c_3=0\\2c_2+2c_3=1\\2c_1+c_2=0\end{cases}$$

解之，得

$$c_1=\frac{1}{2},\qquad c_2=-1,\qquad c_3=\frac{3}{2}$$

于是，原方程组满足初值条件的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}-2e^t+\dfrac{3}{2}e^{2t}\\x_2=1-e^t\end{cases}$$

求解下列方程组(习题 451～习题 453)

【451】
$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=y_1+y_2+y_3+y_4\\\dfrac{dy_2}{dx}=y_1+y_2-y_3-y_4\\\dfrac{dy_3}{dx}=y_1-y_2+y_3-y_4\\\dfrac{dy_4}{dx}=y_1-y_2-y_3+y_4\end{cases}$$

解 系数矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^3(\lambda+2)=0$$

解得特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=2$（三重）.

相应于 $\lambda_1=-2$，相应的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=c=d=-a$. 取 $a=-1$，则 $b=c=d=1$. 那么相应的解为

$$e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=2$ 广义特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^3\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=4^8\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b+c+d$. 所以，三个线性无关的向量为

$$r_{10}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad r_{20}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad r_{30}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

因此

$$r_{11}=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$=4\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\-1&1&1&1\\-1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

所以

$$r_{12}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

同理

$$r_{21}=r_{22}=r_{31}=r_{32}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

因此可得一个基解矩阵为

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}-e^{-2x} & e^{2x} & e^{2x} & e^{2x}\\ e^{-2x} & e^{2x} & 0 & 0\\ e^{-2x} & 0 & e^{2x} & 0\\ e^{-2x} & 0 & 0 & e^{2x}\end{pmatrix}$$

于是，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=C_1e^{-2x}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_3e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_4e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

【452】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y\\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=x\end{cases}$

解　令$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x_1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y$

令$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y_1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=x$

因此，原二阶方程组可变为一阶方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x_1\\[2mm]\dfrac{dx_1}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=y_1\\[2mm]\dfrac{dy_1}{dt}=x\end{cases}$$

其系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&0&-\lambda&1\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$$

求得特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=i$，$\lambda_4=-i$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b=c=d$. 取 $a=b=c=d=1$ 得相应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ y \\ y_1 \end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=c=-d=-b$. 取 $a=c=-d=-b=1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ y \\ y_1 \end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_3=i$ 的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=-c=id=-ib$，取 $a=1$，则 $c=-1$，$d=-i$，$b=i$. 此时相应的复值解为

$$\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ y \\ y_1 \end{pmatrix}=e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t+i\sin t \\ -\sin t+i\cos t \\ -\cos t-i\sin t \\ \sin t-i\cos t \end{pmatrix}$$

分别取实部和虚部可得两实解为

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x_1^{(1)} \\ y^{(1)} \\ y_1^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ x_1^{(2)} \\ y^{(2)} \\ y_1^{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

易知它们在$(-\infty,+\infty)$上是线性无关. 因此，一阶方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ y \\ y_1 \end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}+C_4\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

那么原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}+C_4\begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

【453】 $\begin{cases} \ddot{x} = 2y \\ \ddot{y} = -2x \end{cases}$

解　令$\dfrac{dx}{dt}=x_1$，$\dfrac{dy}{dt}=y_1$，则原方程组可转化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1 \\ \dfrac{dx_1}{dt} = 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -2x \end{cases}$$

其系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 4 = 0$$

解之得特征值为.

$\lambda_1 = 1 + i$，　$\lambda_2 = -1 + i$，　$\lambda_3 = -1 - i$，　$\lambda_4 = 1 - i$

先求 $\lambda_{1,4} = 1 \pm i$ 所对应的解. 由于

$$\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ y \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

其中 a, b, c, d 应满足

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(1+i) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+i) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+i) & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -(1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

解之得

$$b = (1+i)a, \quad c = \frac{1}{2}(1+i)^2 a = ia, \quad d = (-1+i)a$$

取 $a = 1$，则 $b = 1+i$，$c = i$，$d = -1+i$. 所以，相应的复值解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ -\sin t + i\cos t \end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部可得两个实解

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

再求 $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$ 所对应的解. 由于

$$\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ y \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

其中 a, b, c, d 应满足

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{E}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0.$$

解之得

$$b = -(1-i)a, \quad c = \frac{1}{2}(1-i)^2 a = -ia, \quad d = (1+i)a$$

取 $a=1$，则 $b=-1+i$，$c=-i$，$d=1+i$. 所以，相应的复值解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ \sin t - i\cos t \end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部可再得两实解

$$\begin{pmatrix} x^{(3)} \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x^{(4)} \\ y^{(4)} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

易知这些实解在$(-\infty, +\infty)$上是线性无关的. 于是，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_4 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

试用算子解法求解下列方程组(习题 454～习题 455)

【454】 $\begin{cases} \dot{x}+\dot{y}=2y \\ \dot{x}-\dot{y}=-2x \end{cases}$

解 将方程组改写成

$$\begin{cases} Dx+(D-2)y=0 \\ (D+2)x-Dy=0 \end{cases}$$

所以

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix} D & D-2 \\ D+2 & -D \end{vmatrix}=-2D^2+4=2(\sqrt{2}+D)(\sqrt{2}-D)$$

化为解二阶方程

$$\Delta(D)x=2(2-D^2)x=0$$

方程的特征方程$(2-\lambda^2)=0$，得特征值 $\lambda=\pm\sqrt{2}$，因而有通解

$$x=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}$$

再由第二个方程得

$$\dot{y}=\dot{x}+2x$$

即

$$\begin{aligned} y &= x+2\int x(t)\mathrm{d}t = x(t)+2\int(C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t})\mathrm{d}t \\ &= C_1(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}+C_2(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \end{aligned}$$

得原方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}+C_2e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

【455】 $\begin{cases} \dot{x}_1=-x_1+2x_2 \\ \dot{x}_2=-2x_1+3x_2 \end{cases}$

解 将方程组改写成

$$\begin{cases}(D+1)x_1-2x_2=0\\ 2x_1+(D-3)x_2=0\end{cases}$$

所以

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix}D+1 & -2\\ 2 & D-3\end{vmatrix}=D^2-2D+1=(D-1)^2$$

解二阶方程

$$\Delta(D)x_1=(D-1)^2x_1=0$$

特征方程为$(\lambda-1)^2=0$. 求得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，所以二阶方程有通解

$$x_1=C_1e^t+C_2te^t$$

代入方程组中第一个方程，有

$$\begin{aligned}x_2&=\frac{1}{2}(\dot{x}_1+x_1)=\frac{1}{2}(2C_1+C_2+2C_2t)e^t\\&=\left[C_1+C_2\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]e^t\end{aligned}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}t\\ \frac{1}{2}+t\end{pmatrix}.$$

利用线性变换把下列方程组的系数矩阵化为若当标准型，并求出全部解(习题 456～习题 461)

【456】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x+4y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+2y\end{cases}$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4\\ 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2+4=0$$

所以特征值为 $\lambda_{1,2}=2\pm 2i$，存在非奇异的矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$$

使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2+2i & 0\\ 0 & 2-2i\end{pmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2+2i & 0\\ 0 & 2-2i\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+2i & 0\\ 0 & 2-2i\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases}-2p_{11}+4p_{21}=(2+2i)p_{11}\\ -p_{11}+2p_{21}=(2+2i)p_{21}\end{cases}$$

即有 $p_{11}=-2ip_{21}$，可取 $p_{21}=i$，则 $p_{11}=2$

$$\begin{cases}-2p_{12}+4p_{22}=(2-2i)p_{12}\\ -p_{12}+2p_{22}=(2-2i)p_{22}\end{cases}$$

即 $p_{12}=2ip_{22}$，可取 $p_{22}=-i$，则 $p_{12}=2$. 所以

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ i & -i\end{pmatrix}$$

作变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

方程组可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2i & 0 \\ 0 & 2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

容易求出它的解

$$z_1 = C_1 e^{(2+2i)t}, \qquad z_2 = C_2 e^{(2-2i)t}$$

再代回原变量

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

上式右端 $= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^{(2+2i)t} \\ C_2 e^{(2-2i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{(2+2i)t} + 2C_2 e^{(2-2i)t} \\ iC_1 e^{(2+2i)t} - iC_2 e^{(2-2i)t} \end{pmatrix}$

分别取上式的实部与虚部，可得原方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Ae^{2t}\cos 2t + 2Be^{2t}\sin 2t \\ -Ae^{2t}\sin 2t + Be^{2t}\cos 2t \end{pmatrix}$$

其中 $A = C_1 + C_2$，$B = C_1 - C_2$.

【457】 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5x + 4y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4x + 5y \end{cases}$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=9$，一定存在非奇异矩阵

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

或

$$AP=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases} 5p_{11}+4p_{21}=p_{11} \\ 4p_{11}+5p_{21}=p_{21} \end{cases}$$

解之得 $p_{11}=-p_{21}$，可取 $p_{21}=-1$，则 $p_{11}=1$

$$\begin{cases} 5p_{12}+4p_{22}=9p_{12} \\ 4p_{12}+5p_{22}=9p_{22} \end{cases}$$

解之得 $p_{12}=p_{22}$，可取 $p_{22}=1$，则 $p_{12}=1$. 从而

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

作变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

方程组可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

易求出它的解

$$z_1 = C_1 e^t, \qquad z_2 = C_2 e^{9t}$$

再代回原变量

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

上式右端 $= \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{9t} \\ -C_1 e^t + C_2 e^{9t} \end{pmatrix}$

即原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{9t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

【458】 求下列初值问题的解：

1) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + 3y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + 2y \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 2y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2x + z \\ x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$

解　1) 特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0$$

特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=5$.

相应于 $\lambda_1=-1$ 时的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

解得 $a=-b$. 取 $a=-b=1$，那么相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=5$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-3 & 3\\3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=b$. 令 $a=b=1$，则相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

将初值条件代入通解可得初值问题的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{5t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\\frac{1}{2}e^{5t}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{pmatrix}$$

2) 特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 1\\1 & -1-\lambda & 1\\2 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0$$

特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$.

相应于 $\lambda_1=3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\1 & -4 & 1\\2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=2b=c$. 取 $b=1$，则 $a=c=2$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_{2,3}=-1$ 时，方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}t\\r_{21}+r_{22}t\\r_{31}+r_{32}t\end{pmatrix}$$

的解，将其代入方程组并消去 e^{-t} 后得

$$-r_{11}-r_{12}t+r_{12}=r_{11}+r_{12}t+2r_{21}+2r_{22}t+r_{31}+r_{32}t$$

$$-r_{21}-r_{22}t+r_{22}=r_{11}+r_{12}t-r_{21}-r_{22}t+r_{31}+r_{32}t$$

$$-r_{31}-r_{32}t+r_{32}=2r_{11}+2r_{12}t+r_{31}+r_{32}t$$

比较 t 的同次幂系数得

$$r_{32}=-r_{12}=2r_{22}=2r_{11}+2r_{31}$$

$$2r_{21}=-4r_{11}-3r_{31}$$

令 $r_{11}=1$，$r_{31}=0$，则 $r_{32}=2$，$r_{12}=-2$，$r_{22}=1$，$r_{21}=-2$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1-2t \\ -2+t \\ 2t \end{pmatrix}$$

令 $r_{11}=0$，$r_{31}=1$，则 $r_{32}=2$，$r_{12}=-2$，$r_{22}=1$，$r_{21}=-\dfrac{3}{2}$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -2t \\ -\dfrac{3}{2}+t \\ 1+2t \end{pmatrix}$$

这三个解在$(-\infty, +\infty)$上线性无关，即得方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1-2t \\ -2+t \\ 2t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t \\ -\dfrac{3}{2}+t \\ 1+2t \end{pmatrix}$$

将初值条件代入确定 $C_1=\dfrac{1}{4}$，$C_2=\dfrac{1}{2}$，$C_3=-\dfrac{1}{2}$，最后得到该初值问题的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) \\ \dfrac{1}{4}(e^{3t}-e^{-t}) \\ \dfrac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

【459】 试证明常系数齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1}$$

有以 $\omega \neq 0$ 为周期的周期解的充要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少具

有一个形如$i\dfrac{2\pi}{\omega}$的特征根.

证　必要性　由(1)解的结构可知，若方程组(1)具有以ω为周期的周期解，则必为$\cos\dfrac{2\pi}{\omega}t$和$\sin\dfrac{2\pi}{\omega}t$，从而系数矩阵至少具有一个形如$i\dfrac{2\pi}{\omega}$的特征根.

充分性　若(1)的系数矩阵有形如$i\dfrac{2\pi}{\omega}$的特征根，那么与$i\dfrac{2\pi}{\omega}$相应的解可表示成

$$\boldsymbol{x}(t)=\left(\cos\frac{2\pi}{\omega}t+i\sin\frac{2\pi}{\omega}t\right)\boldsymbol{C}$$

其中$\boldsymbol{C}$是与$i\dfrac{2\pi}{\omega}$相应的特征向量. 显然

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t+\omega)&=\left[\cos\frac{2\pi}{\omega}(t+\omega)+i\sin\frac{2\pi}{\omega}(t+\omega)\right]\boldsymbol{C}\\&=\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}t+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}t+2\pi\right)\right]\boldsymbol{C}\\&=\left[\cos\frac{2\pi}{\omega}t+i\sin\frac{2\pi}{\omega}t\right]\boldsymbol{C}=\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

即方程组(1)有以ω为周期的周期解.

【460】　证明:常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

的任何解当$t\to\infty$时都趋于零，当且仅当它的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征根都具有负的实部.

证　充分性　若系数矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值都具有负的实部，设特征根为$\lambda=-\alpha+i\beta\ (\alpha>0)$，与之相应的解可表示成

$$\boldsymbol{x}=e^{-\alpha t}\boldsymbol{F}(t)\qquad(1)$$

当$\beta=0$时，$\lambda=-\alpha$为负实数，由解的结构知$\boldsymbol{F}(t)$是关于t

的一个多项式向量函数，并注意到 $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\alpha t}\cdot t^n=0$，$n$ 是任意自然数. 形如(1)的解当 $t\to+\infty$时，$x(t)\to0$.

当 $\beta\neq0$ 时，$\lambda=-\alpha+i\beta$ 是虚数. 由解的结构，这时(1)中的 $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{f}(t)\ (\cos\beta t+i\sin\beta t)$，其中 $f(t)$是 t 的多项式向量函数，并注意到 $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\alpha t}t^n\cos\beta t=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\alpha t}t^n\sin\beta t=0$，对形如(1)的解仍有当 $t\to\infty$时，$\boldsymbol{x}(t)\to0$.

由解的结构知，方程组的任一解可表为形式为(1)这种类型解的线性组合，因而它的任一解当 $t\to+\infty$时都趋于零.

必要性　假设特征值为 $\lambda=\alpha+i\beta$，与之相应的方程组的解表示成

$$\boldsymbol{x}=e^{\alpha t}\boldsymbol{F}(t)$$

当 $\beta=0$ 时，$\lambda=\alpha$ 为实数，则 $\boldsymbol{F}(t)$为关于 t 的多项式的向量函数. 因此，$\boldsymbol{F}(t)$的每一分量或者为一常数，或者为 t 的多项式的向量函数，这时总有当 $t\to\infty$时，$\boldsymbol{F}(t)\not\to0$,那么只有当 $t\to\infty$时，$e^{\alpha t}\to0$,于是，α 必为负实数. 当 $\beta\neq0$ 时，λ 为复数，则这时 $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{f}(t)\ (\cos\beta t+i\sin\beta t)$，其中 $\boldsymbol{f}(t)$是 t 的多项式的向量函数. 当 $t\to\infty$，$\boldsymbol{F}(t)\not\to0$，那么，若使当 $t\to\infty$时，有 $\boldsymbol{x}\to0$ 成立，只有 $e^{\alpha t}\to0\ (t\to\infty)$，于是，$\alpha$ 也必为负实数.

【461】 试证明:对于常系数齐次方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 的特征根的实部都是非正的，且实部为零的特征根都是单根，则(1)的任意解在$[0,+\infty)$上有界.

证　由上题知，当 $\boldsymbol{A}$ 的特征根的实部为负数时，(1)的对应于这些特征根的解当 $t\to+\infty$时都趋于零，从而知道这种类型的解在$[0,+\infty)$上有界. 当特征根的实部为零时，由题设知此类特征根为单根，我们不妨设 $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_2=i\beta$，由(1)相应

于 λ_1 及 λ_2 的解可表为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{C}$$

或

$$\boldsymbol{x}(t)=(\cos\beta t+i\sin\beta t)\boldsymbol{C}$$

这里 $\boldsymbol{C}$ 为相应的特征向量. 这种类型的解在$[0,+\infty)$上有界. 由解的结构定理知,(1)的任一解可以表为上述这些类型解的线性组合,从而知任一解在$[0,+\infty)$上都是有界的.

§5.4　常系数非齐次线性微分方程组

提　要

常系数非齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n},\qquad \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$$

1　常数变易法

若已知对应于(1)的齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{2}$$

的通解

$$\boldsymbol{x}=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+C_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

可用常数变易法求(1)的解,即令(1)的解

$$\boldsymbol{x}=C_1(t)\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+C_n(t)\boldsymbol{x}_n(t)$$

其中 $C_1'(t),\cdots,C_n'(t)$满足代数方程组

$$C_1'(t)\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+C_n'(t)\boldsymbol{x}_n(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{3}$$

(3)的系数行列式就是 $\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$的朗斯基行列式

$$W(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))=\det(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))\neq 0$$

由(3)可求得 $C_1'(t),\cdots,C_n'(t)$，再积分得 $C_1(t),\cdots,C_n(t)$. 于是(1)的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{k=1}^{n}C_k\boldsymbol{x}_k(t)+C_1(t)\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+C_n(t)\boldsymbol{x}_n(t)$$

2　拉普拉斯变换法

记向量函数 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{X}(s)=\begin{pmatrix}\mathcal{L}(x_1(t))\\ \vdots\\ \mathcal{L}(x_n(t))\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{f}(t)]=\boldsymbol{F}(s)$$

对方程组(1)两端进行拉普拉斯变换，得 $\boldsymbol{X}(s)$的代数方程组

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{F}(s)$$

求解得 $\boldsymbol{X}(s)$，再求逆变换 $\mathcal{L}^{-1}[\boldsymbol{X}(s)]=\boldsymbol{x}(t)$，此即为方程组(1)的解.

3　算子解法

类似于齐次线性微分方程组，算子解法也适用于非齐次线性微分方程组.

对于某些类型的变系数的非齐次线性方程组，可以选取适当变换转化为常系数的线性方程组后求得其通解.

题　解

求解下列方程组(习题 462～习题 479)

【462】 $\begin{cases} \dot{x} = y + \tan^2 t + 1 \\ \dot{y} = -x + \tan t \end{cases}$

解　先求对应的齐次方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{1}$$

的通解. 特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

特征值为 $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$,

对应于 $\lambda_1 = i$ 的解形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

将其代入方程组(1)并消去 e^{it} 后得

$$\begin{cases} ai - b = 0 \\ bi + a = 0 \end{cases}$$

解得 $a = -bi$. 不妨令 $b = i$, 则 $a = 1$, 那么

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ -\sin t + i\cos t \end{pmatrix}$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

由常数变易法，求原方程组的形如

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = C_1(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

的特解，其中 $C_1(t)$，$C_2(t)$为待定函数. 将此形式解代入原方程组，得

$$C_1'(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2'(t)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan^2 t + 1 \\ \tan t \end{pmatrix}$$

其纯量形式为

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = \tan^2 t + 1 \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \tan t \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t) = \cos t, \quad C_2'(t) = \left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 2\right)\sin t = \left(\frac{1}{\cos^2 t} + 1\right)\sin t$$

积分后得

$$C_1(t) = \sin t, \qquad C_2(t) = \frac{1}{\cos t} - \cos t = \frac{\sin^2 t}{\cos t}$$

得特解

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t\cos t \\ -\sin^2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\sin^3 t}{\cos t} \\ \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t\cos t + \dfrac{\sin^3 t}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t\cos t + \dfrac{\sin^3 t}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

【463】 $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^t \\ \dot{y} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$

解 先求对应的齐次方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y-5x \\ \dfrac{dy}{dt}=x-6y\end{cases} \tag{1}$$

的通解. 特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-5-\lambda & 2 \\ 1 & -6-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda+7)=0$$

特征值为 $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=-7$.

相应于 $\lambda_1=-4$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=2b$. 令 $b=1$, 则 $a=2$, 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-4t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-7$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=-b$. 令 $b=-1$, 则 $a=1$, 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-7t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

因此, 齐次方程组(1)的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-4t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-7t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

由常数变易法知, 原方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = C_1(t)e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t)e^{-7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

的特解．将其代入原方程组可求得

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{-4t}\cdot 2 + C_2'(t)e^{-7t} = e^t \\ C_1'(t)e^{-4t} - C_2'(t)e^{-7t} = e^{-2t} \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t) = \frac{e^{5t}+e^{2t}}{3}, \qquad C_2'(t) = \frac{e^{8t}-2e^{5t}}{3}$$

积分得

$$C_1(t) = \frac{e^{5t}}{15} + \frac{e^{2t}}{6}, \qquad C_2(t) = \frac{e^{8t}}{24} - \frac{2e^{5t}}{15}$$

所以，特解为

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{15}e^{5t} + \frac{1}{6}e^{2t}\right)e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{24}e^{8t} - \frac{2}{15}e^{5t}\right)e^{-7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{5}e^{-2t} \\ \frac{1}{40}e^t + \frac{3}{10}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

因此，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} \frac{7}{40} \\ \frac{1}{40} \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

【464】 $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1 \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$

解 先求对应的齐次方程组的通解．特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0$$

特征值为 $\lambda_{1,2}=1$（二重）.

那么，齐次方程组有如下形式的解

$$x=(r_{11}+r_{12}t)e^t,\qquad y=(r_{21}+r_{22}t)e^t$$

将其代入原方程组，并消去 e^t 后得

$$2(r_{11}+r_{22}t)+r_{12}=2r_{21}+2r_{22}t,$$

$$r_{21}+r_{22}t+r_{22}=3(r_{21}+r_{22}t)-2(r_{11}+r_{12}t)$$

令 t 的同次幂系数相等得

$$2r_{11}+r_{12}-2r_{21}=0,\qquad r_{12}=r_{22}.$$

取 $r_{21}=1$，$r_{12}=r_{22}=0$，则 $r_{11}=1$，那么相应的一个特解为

$$x_1=e^t,\qquad y_1=e^t$$

取 $r_{21}=0$，$r_{12}=r_{22}=1$，则 $r_{11}=-\dfrac{1}{2}$，那么另一特解为

$$x_2=\left(-\frac{1}{2}+t\right)e^t,\qquad y_2=te^t$$

易证这两个解在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关. 因而，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}+t\\ t\end{pmatrix}$$

由常数变易法，可知原方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\end{pmatrix}=C_1(t)e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2(t)e^t\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}+t\\ t\end{pmatrix}$$

的特解. 将其代入原方程组，得

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^t\left(-\dfrac{1}{2}+t\right)=1 \\ C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^t\cdot t=0 \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t)=2te^{-t}, \qquad C_2'(t)=-2e^{-t}$$

积分可得

$$C_1(t)=-2(t+1)e^{-t}, \qquad C_2(t)=2e^{-t}$$

得非齐次方程组的特解

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = -2(t+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}+t \\ t \end{pmatrix}$$

整理得

$$x^*=-3, \qquad y^*=-2$$

所以，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}+t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

【465】 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - y = \cos t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + x = 1 \end{cases}$

解 整理得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + \cos t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + 1 \end{cases}$$

先求对应的齐次方程组的通解．由特征方程

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$

特征值 $\lambda_1=i$，$\lambda_2=-i$. 相应于 $\lambda_1=i$ 的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=ia$. 令 $a=1$，则 $b=i$，那么相应复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{it}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t+i\sin t\\ -\sin t+i\cos t\end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部可得齐次方程组的两个实值解

$$x_1=\cos t,\qquad y_1=-\sin t$$

$$x_2=\sin t,\qquad y_2=\cos t$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

根据常数变易法，原方程组有如下形式的特解

$$\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\end{pmatrix}=C_1(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+C_2(t)\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

将其代入方程组，得

$$\begin{cases}C_1'(t)\cos t+C_2'(t)\sin t=\cos t\\ -C_1'(t)\sin t+C_2'(t)\cos t=1\end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t)=\cos^2 t-\sin t,\qquad C_2'(t)=\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$$

积分得

$$C_1(t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\cos t,\quad C_2(t)=-\frac{1}{4}\cos 2t+\sin t$$

因此，特解为

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \cos t\right)\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\cos 2t + \sin t\right)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{4}\sin t + 1 \\ -\frac{1}{2}t\sin t - \frac{1}{4}\cos t \end{pmatrix}$$

所以，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{4}\sin t + 1 \\ -\frac{1}{2}t\sin t - \frac{1}{4}\cos t \end{pmatrix}.$$

【466】 $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$

解 首先求对应的齐次方程组的通解. 特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$，

相应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

得 $a = b$. 取 $a = b = 1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$ 时的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 满足

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

得 $a=-b$. 取 $b=-1$, 则 $a=1$, 那么相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

由常数变易法，知原方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=C_1(t)e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2(t)e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

的特解，其中 $C_1'(t)$, $C_2'(t)$满足

$$C_1'(t)e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2'(t)e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^t\\t^2\end{pmatrix}$$

其纯量形式为

$$\begin{cases}C_1'(t)e^t+C_2'(t)e^{-t}=2e^t\\C_1'(t)e^t-C_2'(t)e^{-t}=t^2\end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t)=1+\frac{1}{2}t^2e^{-t},\qquad C_2'(t)=e^{2t}-\frac{1}{2}t^2e^t$$

积分得

$$C_1(t)=t-\frac{1}{2}t^2e^{-t}-te^{-t}-e^{-t}$$

$$C_2(t)=\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}t^2e^t+te^t-e^t$$

原方程组的特解为

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 \\ te^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}t^2 + t - 1 \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$$

整理得

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} + t)e^t - t^2 - 2 \\ (t - \frac{1}{2})e^t - 2t \end{pmatrix}$$

于是，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} + t)e^t - t^2 - 2 \\ (t - \frac{1}{2})e^t - 2t \end{pmatrix}.$$

【467】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y - e^{-t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y - 4e^{-t} \end{cases}$

解 先求对应的齐次方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

其特征方程

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

特征值为 $\lambda_1 = 2 + 2i$，$\lambda_2 = 2 - 2i$.

相应于 $\lambda_1 = 2 + 2i$ 的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=-2ib$. 取 $b=1$, 则 $a=-2i$, 那么相应的复值解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=e^{(2+2i)t}\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix} -2i\cos2t+2\sin2t \\ \cos2t+i\sin2t \end{pmatrix}$$

分别取实部和虚部，可得两个实解为

$$x_1=2e^{2t}\sin2t,\qquad y_1=e^{2t}\cos2t$$

$$x_2=-2e^{2t}\cos2t,\qquad y_2=e^{2t}\sin2t$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin2t \\ \cos2t \end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos2t \\ \sin2t \end{pmatrix}$$

由常数变易法知，原方程组有如下形式的特解

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}=C_1(t)e^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin2t \\ \cos2t \end{pmatrix}+C_2(t)e^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos2t \\ \sin2t \end{pmatrix}$$

其中 $C_1'(t)$, $C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{2t}\cdot2\sin2t+C_2'(t)e^{2t}(-2\cos2t)=-e^{-t} \\ C_1'(t)e^{2t}\cos2t+C_2'(t)e^{2t}\sin2t=-4e^{-t} \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t)=\left(-\frac{1}{2}\sin2t-4\cos2t\right)e^{-3t}$$

$$C_2'(t)=\left(\frac{1}{2}\cos2t-4\sin2t\right)e^{-3t}$$

积分得

$$C_1(t)=e^{-3t}\left(-\frac{1}{2}\sin2t+\cos2t\right)$$

$$C_2(t)=e^{-3t}\left(\frac{1}{2}\cos2t+\sin2t\right)$$

于是，特解为

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = e^{-3t}\left(-\frac{1}{2}\sin 2t + \cos 2t\right)e^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$+ e^{-3t}\left(\frac{1}{2}\cos 2t + \sin 2t\right)e^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

整理得

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

【468】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = e^t \\ \dfrac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t} \end{cases}$

解 整理可得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y + e^{2t} \end{cases}$$

先求对应的齐次方程组的通解. 特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)^2 = 0$$

特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$. 因此，齐次方程组有形如

$$x = (r_{11} + r_{12}t)e^{-4t}, \qquad y = (r_{21} + r_{22}t)e^{-4t}$$

的解. 将其代入齐次方程组得

$$r_{12} = -(r_{11} + r_{12}t) - (r_{21} + r_{22}t),$$

$$-(r_{21}+r_{22}t)+r_{22}=r_{11}+r_{12}t$$

令 t 的同次幂系数相等，可得

$$r_{11}+r_{12}+r_{21}=0, \qquad r_{12}+r_{22}=0$$

即

$$r_{21}=-(r_{11}+r_{12}), \qquad r_{22}=-r_{12}$$

令 $r_{12}=1$，$r_{11}=0$，则 $r_{22}=-1$，$r_{21}=-1$，那么相应于 $\lambda=-4$ 的一个解为

$$x_1=te^{-4t}, \qquad y_1=(-1-t)e^{-4t}$$

令 $r_{12}=0$，$r_{11}=1$，则 $r_{22}=0$，$r_{21}=-1$，那么相应的另一个解为

$$x_2=e^{-4t}, \qquad y_2=-e^{-4t}$$

易知这两个解在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^{-4t}\begin{pmatrix} t \\ -1-t \end{pmatrix}+C_2e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

非齐次方程组有如下形式的特解

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}=C_1(t)e^{-4t}\begin{pmatrix} t \\ -1-t \end{pmatrix}+C_2(t)e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)te^{-4t}+C_2'(t)e^{-4t}=e^t \\ C_1'(t)(-1-t)e^{-4t}-C_2'(t)e^{-4t}=e^{2t} \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t)=-(e^{5t}+e^{6t}) \qquad C_2'(t)=(1+t)e^{5t}+te^{6t}$$

积分得

$$C_1(t) = -\left(\frac{1}{5}e^{5t} + \frac{1}{6}e^{6t}\right)$$

$$C_2(t) = \left(\frac{1}{5}t + \frac{4}{25}\right)e^{5t} + \left(\frac{1}{6}t - \frac{1}{36}\right)e^{6t}$$

所以，非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} t \\ -1-t \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} \frac{4}{25} \\ \frac{1}{25} \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} -\frac{1}{36} \\ \frac{7}{36} \end{pmatrix}.$$

【469】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + 2e^{-t} \end{cases}$

解 先求相应的齐次方程组的通解. 系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

特征值 $\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = -1$.

相应于 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $a = b$. 令 $a = b = 1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=-b$. 令 $a=-b=1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

于是，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

由常数变易法知，原方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\end{pmatrix}=C_1(t)e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2(t)e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

的特解，其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$\begin{cases}e^{3t}C_1'(t)+e^{-t}C_2'(t)=2\\ e^{3t}C_1'(t)-e^{-t}C_2'(t)=2e^{-t}\end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t)=e^{-3t}+e^{-4t},\qquad C_2'(t)=e^t-1$$

积分后求得

$$C_1(t)=-\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{1}{4}e^{-4t},\qquad C_2(t)=e^t-t$$

于是，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}-te^{-t}-\dfrac{1}{4}e^{t}\\ -\dfrac{4}{3}+te^{-t}-\dfrac{1}{4}e^{-t}\end{pmatrix}.$$

【470】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-3y+\sin t\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y-2\cos t\end{cases}$

解 先求相应的齐次方程组的通解. 系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

所以，特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}3 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b$. 令 $a=b=1$，则相应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=\dfrac{3}{2}b$. 令 $b=2$，则 $a=3$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

于是，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

由常数变易法，原方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = C_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

的特解，其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)\cdot 3e^{2t} = \sin t \\ C_1'(t)e^t + C_2'(t)\cdot 2e^{2t} = -2\cos t \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t) = e^{-t}(-2\sin t - 6\cos t)$$

$$C_2'(t) = e^{-2t}(\sin t + 2\cos t)$$

积分得

$$C_1(t) = 2e^{-t}(2\cos t - \sin t)$$

$$C_2(t) = -e^{-2t}\cos t$$

于是，特解为

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos t - 2\sin t \\ 4\cos t - 2\sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ 2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$$

因此，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ 2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix}.$$

【471】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + y + 3 \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x + y - 3 \end{cases}$

解　先将原方程组整理可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+3\end{cases}$$

先求相应的齐次方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x\end{cases}$$

的通解. 它的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$

特征值 $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$.

当 $\lambda=i$ 时，相应的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

即 $b=ia$. 令 $a=1$，则 $b=i$. 那么相应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{it}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t+i\sin t\\ -\sin t+i\cos t\end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部，可得方程组的两个实解

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

由常数变易法知，非齐次方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\end{pmatrix}=C_1(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+C_2(t)\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

的特解，其中 $C_1'(t)$, $C_2'(t)$满足

$$\begin{cases}C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0\\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = 3\end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t) = -3\sin t, \qquad C_2'(t) = 3\cos t$$

积分得

$$C_1(t) = 3\cos t, \qquad C_2(t) = 3\sin t$$

因此，非齐次方程组的特解为

$$\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\end{pmatrix} = 3\cos t\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + 3\sin t\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}$$

于是，非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}.$$

【472】 $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 1\\ \dfrac{dy}{dt} = 2y\end{cases}$$

解　先求相应的齐次方程组的通解. 易知特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0$$

特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. 那么，齐次方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_{11} + r_{12}t\\ r_{21} + r_{22}t\end{pmatrix}e^{2t}$$

的解. 将其代入齐次方程组并消去 e^{2t} 后得

$$2(r_{11} + r_{12}t) + r_{12} = 2(r_{11} + r_{12}t) + (r_{21} + r_{22}t)$$

$$2(r_{21} + r_{22}t) + r_{22} = 2(r_{21} + r_{22}t)$$

比较 t 的同次幂的系数可得

$$r_{21}-r_{12}=0,\quad r_{22}=0,\quad r_{22}\text{可任意选取}.$$

令 $r_{12}=r_{21}=1$，$r_{22}=0$，$r_{11}=0$，则相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$$

令 $r_{12}=r_{21}=0$，$r_{22}=0$，$r_{11}=1$，则相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

由常数变易法知，原方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=C_1(t)e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}+C_2(t)e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

的特解,其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$\begin{cases}C_1'(t)e^{2t}t+C_2'(t)e^{2t}=1\\C_1'(t)e^{2t}=0\end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t)=0,\qquad C_2'(t)=e^{-2t}$$

积分后得

$$C_1(t)=1,\qquad C_2(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}$$

因此，非齐次方程组的特解为

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+te^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix}$$

于是，非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+te^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix}.$$

【473】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y+15e^t\sqrt{t}\end{cases}$

解　先求相应的齐次方程组的通解. 易知特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0$$

特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$. 因此，齐次方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}t\\r_{21}+r_{22}t\end{pmatrix}$$

的解. 将其代入非齐次方程组并消去 e^t 后得

$$r_{11}+r_{12}t+r_{12}=3(r_{11}+r_{12}t)-2(r_{21}+r_{22}t)$$

$$r_{21}+r_{22}t+r_{22}=2(r_{11}+r_{12}t)-(r_{21}+r_{22}t)$$

比较 t 的同次幂的系数可得

$$2r_{11}-r_{12}-2r_{21}=0,\qquad r_{12}-r_{22}=0$$

$$2r_{21}-2r_{11}+r_{22}=0,\qquad r_{22}-r_{12}=0$$

即 $r_{12}=r_{22}$，$r_{12}=2r_{11}-2r_{21}$. 令 $r_{11}=1$，$r_{21}=0$，则 $r_{12}=r_{22}=2$. 那么，相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1+2t\\2t\end{pmatrix}$$

令 $r_{11}=0$，$r_{21}=1$，则 $r_{12}=r_{22}=-2$，那么，相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}-2t\\1-2t\end{pmatrix}$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -2t \\ 1-2t \end{pmatrix}$$

由常数变易法知，原方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = C_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2t \end{pmatrix} + C_2(t) e^t \begin{pmatrix} -2t \\ 1-2t \end{pmatrix}$$

的特解，其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t(1+2t) + C_2'(t)e^t(-2t) = 0 \\ C_1'(t)e^t \cdot 2t + C_2'(t)e^t(1-2t) = 15e^t\sqrt{t} \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t) = 30t^{\frac{3}{2}}, \qquad C_2'(t) = 15t^{\frac{1}{2}} + 30t^{\frac{3}{2}}$$

积分得

$$C_1(t) = 12t^{\frac{5}{2}}, \qquad C_2(t) = 10t^{\frac{3}{2}} + 12t^{\frac{5}{2}}$$

因此，非齐次方程组的特解为

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = 12t^{\frac{5}{2}} e^t \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2t \end{pmatrix} + (10t^{\frac{3}{2}} + 12t^{\frac{5}{2}}) e^t \begin{pmatrix} -2t \\ 1-2t \end{pmatrix}$$

$$\text{上式右端} = e^t \begin{pmatrix} 12t^{\frac{5}{2}} + 12t^{\frac{5}{2}}\cdot 2t - 10t^{\frac{3}{2}}\cdot 2t - 12t^{\frac{5}{2}}\cdot 2t \\ 12t^{\frac{5}{2}}\cdot 2t + 10t^{\frac{3}{2}} - 10t^{\frac{3}{2}}\cdot 2t + 12t^{\frac{5}{2}} - 12t^{\frac{5}{2}}\cdot 2t \end{pmatrix}$$

整理得

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -8t^{\frac{5}{2}} \\ 10t^{\frac{3}{2}} - 8t^{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

于是，原非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -2t \\ 1-2t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -8t^{\frac{5}{2}} \\ 10t^{\frac{3}{2}} - 8t^{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}.$$

【474】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$

解　先求相应的齐次方程组的通解. 易知系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$.

相应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

即 $a = b$. 令 $a = b = 1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

即 $a = -b$. 令 $b = -1$，则 $a = 1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

由常数变易法知，原方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = C_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

的特解，其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-t} = 0 \\ C_1'(t)e^t - C_2'(t)e^{-t} = e^t + e^{-t} \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t) = \frac{1+e^{-2t}}{2}, \qquad C_2'(t) = -\frac{1+e^{2t}}{2}$$

积分得

$$C_1(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-2t}, \qquad C_2(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{2t}$$

所以，该特解为

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-2t}\right)e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{2t}\right)e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{上式右端} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^t \\ \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^t \end{pmatrix}$$

整理得

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

于是，非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$+ e^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

【475】 $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$

解　先求相应的齐次方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y \\ \dot{y} = 6x + 3y \end{cases}$$

的通解．其特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1) = 0$$

特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = -1$．

相应于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

即 $a = -\frac{1}{2}b$．取 $b = -2$，则 $a = 1$．那么相应于 $\lambda_1 = 0$ 的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-3 & -2\\6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=-\dfrac{2}{3}b$. 取 $b=3$，则 $a=2$，那么相应于 $\lambda_2=-1$ 的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

于是，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

根据常数变易法，原方程组有下列形式的特解

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=C_1(t)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2(t)e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$C_1'(t)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2'(t)\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{e^t-1}\\-\dfrac{3}{e^t-1}\end{pmatrix}$$

其纯量形式为

$$\begin{cases}C_1'(t)+C_2'(t)2e^{-t}=\dfrac{2}{e^t-1}\\-2C_1'(t)-3e^{-t}C_2'(t)=-\dfrac{3}{e^t-1}\end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t)=0,\qquad C_2'(t)=\frac{e^t}{e^t-1}$$

积分得

$$C_1(t)=1,\qquad C_2(t)=\ln|e^t-1|.$$

因此，这个特解为

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\ln|e^t-1|e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

于是，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\ln|e^t-1|e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}.$$

【476】 $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-n^2y+\cos nt\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-n^2x+\sin nt\end{cases}\qquad(n\neq0)$$

解　先求相应的齐次方程组的通解. 其特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & -n^2\\-n^2 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-n^4=0$$

特征值 $\lambda_1=n^2$，$\lambda_2=-n^2$.

相应于 $\lambda_1=n^2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-n^2 & -n^2\\-n^2 & -n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=-b$. 令 $a=-b=1$，则相应的齐次方程组的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{n^2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2=-n^2$ 时，相应的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}n^2 & -n^2\\-n^2 & n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=b$. 令 $a=b=1$，则相应的齐次方程组的特解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-n^2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{n^2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-n^2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由常数变易法知，非齐次方程组有下列形式的特解

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = C_1(t) e^{n^2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{-n^2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{n^2 t} + C_2'(t)e^{-n^2 t} = \cos nt \\ -C_1'(t)e^{n^2 t} + C_2'(t)e^{-n^2 t} = \sin nt \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t) = \frac{e^{-n^2 t}(\cos nt - \sin nt)}{2}$$

$$C_2'(t) = \frac{e^{n^2 t}(\cos nt + \sin nt)}{2}$$

积分得

$$C_1(t) = \frac{e^{-n^2 t}[(1+n)\sin nt - (n-1)\cos nt]}{2n(n^2+1)}$$

$$C_2(t) = \frac{e^{n^2 t}[(1+n)\sin nt + (n-1)\cos nt]}{2n(n^2+1)}$$

因此，非齐次方程组的特解为

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nt \\ \dfrac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nt \end{pmatrix}$$

于是，非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{n^2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-n^2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nt \\ \dfrac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nt \end{pmatrix}.$$

【477】 $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x + y = t^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y + z = 2t \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + z = t \end{cases}$$

解　先求相应的齐次方程组的通解．特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3 = 0$$

所以，特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$．相应于 $\lambda = -1$，齐次方程组有下列形式的特解

$$x = (r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2)e^{-t}$$

$$y = (r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2)e^{-t}$$

$$z = (r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2)e^{-t}$$

将其代入原方程组得

$$-(r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2)e^{-t} + (r_{12} + 2r_{13}t)e^{-t}$$
$$= -(r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2)e^{-t} - (r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2)e^{-t},$$
$$-(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2)e^{-t} + (r_{22} + 2r_{23}t)e^{-t}$$
$$= -(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2)e^{-t} - (r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2)e^{-t},$$
$$-(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2)e^{-t} + (r_{32} + 2r_{33}t)e^{-t}$$
$$= -(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2)e^{-t}.$$

消去 e^{-t} 并令 t 的同次幂系数相等，可得 $r_{11}=r_{11}$（即 r_{11} 可以任意取值），

$$r_{12}=-r_{21},\ r_{22}=-2r_{13}=-r_{31},\ r_{23}=r_{32}=r_{33}=0$$

令 $r_{11}=1$，$r_{12}=-r_{21}=1$，$r_{22}=-2r_{13}=-r_{31}=0$，得相应于 $\lambda=-1$ 的特解为

$$x_1=e^{-t},\qquad y_1=0,\qquad z_1=0$$

令 $r_{11}=0$，$r_{12}=-r_{21}=1$，$r_{22}=-2r_{13}=-r_{31}=0$，得相应解为

$$x_2=te^{-t},\qquad y_2=-e^{-t},\qquad z_2=0$$

令 $r_{11}=0$，$r_{12}=-r_{21}=0$，$r_{22}=-2r_{13}=-r_{31}=2$，得

$$x_3=-t^2e^{-t},\qquad y_3=2te^{-t},\qquad z_3=-2e^{-t}$$

易验证这三个特解在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关. 因而，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}t\\-1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}-t^2\\2t\\-2\end{pmatrix}$$

根据常数变易法知原方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=C_1(t)e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2(t)e^{-t}\begin{pmatrix}t\\-1\\0\end{pmatrix}+C_3(t)e^{-t}\begin{pmatrix}-t^2\\2t\\-2\end{pmatrix}$$

的特解. 将其代入原方程组得

$$C_1'(t)e^{-t}+C_2'(t)te^{-t}-C_3'(t)t^2e^{-t}=t^2$$

$$-C_2'(t)e^{-t}+2C_3'(t)te^{-t}=2t$$

$$-2C_3'(t)e^{-t}=t$$

解之得

$$C_1'(t)=\left(\frac{t^3}{2}+3t^2\right)e^t,\quad C_2'(t)=-(t^2+2t)e^t,$$

$$C_3'(t)=-\frac{t}{2}e^t$$

积分后得

$$C_1(t)=\left(\frac{t^3}{2}+\frac{3}{2}t^2-3t+3\right)e^t,\quad C_2(t)=-t^2e^t,$$

$$C_3(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)e^t$$

所以特解为

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{t^3}{2}+\frac{3}{2}t^2-3t+3\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-t^3\\t^2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}\\t-t^2\\-1+t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}t^2-3t+3\\t\\t-1\end{pmatrix}$$

因此，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}t\\-1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}-t^2\\2t\\-2\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}t^2-3t+3\\t\\t-1\end{pmatrix}$$

整理得

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1+C_2t-C_3t^2\\-C_2+2tC_3\\-2C_3\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}t^2-3t+3\\t\\t-1\end{pmatrix}.$$

【478】 $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y-2z+(2-t)\\ \dfrac{dy}{dt}=-x\\ \dfrac{dz}{dt}=x+y-z+(1-t)\end{cases}$$

解 先求相应的齐次方程组的通解. 特征矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&-2\\-1&-\lambda&0\\1&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^2+1)(\lambda-1)=0$$

特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=-b$, $c=0$. 令 $a=-b=1$, 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2=i$ 时, 相应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix} 2-i & 1 & -2 \\ -1 & -i & 0 \\ 1 & 1 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

即 $a=-ib=c$. 令 $b=1$，则 $a=c=-i$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{it}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin t-i\cos t \\ \cos t+i\sin t \\ \sin t-i\cos t \end{pmatrix}.$$

分别取其实部和虚部可得齐次方程组的两个线性无关的实解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

因此，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

由常数变易法知，原方程组有下列形式的特解

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}=C_1(t)e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2(t)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}+C_3(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$，$C_3'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t+C_2'(t)\sin t+C_3'(t)\cos t=2-t \\ -C_1'(t)e^t+C_2'(t)\cos t-C_3'(t)\sin t=0 \\ C_2'(t)\sin t+C_3'(t)\cos t=1-t \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} C_1'(t) = e^{-t} \\ C_2'(t) = \cos t + (1-t)\sin t \\ C_3'(t) = -\sin t + (1-t)\cos t \end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases} C_1(t) = -e^{-t} \\ C_2(t) = (t-1)\cos t \\ C_3(t) = (1-t)\sin t \end{cases}$$

因此

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (t-1)\cos t\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1-t)\sin t\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

整理得

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是，非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

【479】 求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 + e^t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 3x_2 + 1 \\ x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

的解

解 对应的齐次方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-5)=0$$

特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=5$.

相应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=-b$. 令 $b=-1$，则 $a=1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=5$ 的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

即 $b=2a$. 令 $a=1$，则 $b=2$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=e^{5t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

于是，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

由常数变易法知，非齐次方程组有下列形式的特解

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = C_1(t)e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2(t)e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{-t} + C_2'(t)e^{5t} = e^t \\ -C_1'(t)e^{-t} + 2C_2'(t)e^{5t} = 1 \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t) = \frac{2e^{2t} - e^t}{3}, \qquad C_2'(t) = \frac{e^{-5t} + e^{-4t}}{3}$$

积分得

$$C_1(t) = \frac{e^{2t} - e^t}{3}, \qquad C_2(t) = -\frac{4e^{-5t} + 5e^{-4t}}{60}$$

于是

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \frac{e^t - 1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-4 - 5e^t}{60}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

整理得

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5e^t - 8}{20} \\ \dfrac{-5e^t + 2}{10} \end{pmatrix}$$

因此，非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{5e^t - 8}{20} \\ \dfrac{-5e^t + 2}{10} \end{pmatrix}$$

当 $t = 0$ 时

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 \\ 2C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{20} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{17}{20} \\ -C_1 + 2C_2 = \frac{13}{10} \end{cases}$$

解之得

$$C_1 = -1, \qquad C_2 = \frac{3}{20}$$

所求初值问题的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20}e^{5t} - e^{-t} + \frac{1}{4}e^t - \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10}e^{5t} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

【480】 用拉普拉斯变换法求解下列问题：

1） $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 5x_2 - 2e^{3t} - 55\cos t \\ x_2' = -5x_1 + 3x_2 + 5e^{3t} - 5\sin t \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0 \end{cases}$

2） $\begin{cases} x_1' + x_1 - x_2' = -t \\ x_1'' + 3x_1 - x_2' - x_2 = e^{2t} \\ x_1(0) = 0,\ x_1'(0) = 1,\ x_2(0) = 0 \end{cases}$

解　1）令 $\mathcal{L}[x_i(t)] = X_i(s)\ (i = 1,2)$，对方程组两边进行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} sX_1(s)=3X_1(s)+5X_2(s)-\dfrac{2}{s-3}-\dfrac{55s}{s^2+1} \\ sX_2(s)=-5X_1(s)+3X_2(s)+\dfrac{5}{s-3}-\dfrac{5}{s^2+1} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s-3)X_1(s)-5X_2(s)=-\dfrac{2}{s-3}-\dfrac{55s}{s^2+1} \\ 5X_1(s)+(s-3)X_2(s)=\dfrac{5}{s-3}-\dfrac{5}{s^2+1} \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} X_1(s)=\dfrac{-42}{(s-3)^2+25}-\dfrac{6(s-3)}{(s-3)^2+25}+\dfrac{5s}{s^2+1}+\dfrac{1}{s-3} \\ X_2(s)=\left(-\dfrac{42}{5}\right)\dfrac{s-3}{(s-3)^2+25}+\dfrac{30}{(s-3)^2+25}+\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{s-3}-\dfrac{1}{s^2+1}+\dfrac{8s}{s^2+1} \end{cases}$$

再求逆变换，即得原方程组的初值问题的解

$$\begin{cases} x_1(t)=\left(-6\cos 5t+\dfrac{42}{5}\sin 5t\right)e^{3t}+e^{3t}+5\cos t \\ x_2(t)=\left(-\dfrac{42}{5}\cos 5t+6\sin 5t\right)e^{3t}+\dfrac{2}{5}e^{3t}-\sin t+8\cos t \end{cases}$$

2) 令 $\mathcal{L}[x_i(t)]=X_i(s)$ $(i=1,2)$，对方程组两边进行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} sX_1(s)+X_1(s)-sX_2(s)=-\dfrac{1}{s^2} \\ s^2X_1(s)-1+3X_1(s)-sX_2(s)-X_2(s)=\dfrac{1}{s-2} \end{cases}$$

整理可得

$$\begin{cases} (s+1)X_1(s)-sX_2(s)=-\dfrac{1}{s^2} \\ (s^2+3)X_1(s)-(s+1)X_2(s)=\dfrac{1}{s-2}+1 \end{cases}$$

从而得

$$X_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}-\frac{1}{s^2} & -s\\ \frac{1}{s-2}+1 & -(s+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s+1 & -s\\ s^2+3 & -(s+1)\end{vmatrix}}=\frac{s^4-s^3+s^2-s-2}{s^2(s-2)(s-1)(s^2+1)}$$

$$=-\frac{2}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{\frac{2}{5}}{s-2}+\frac{1}{s-1}+\frac{\frac{3}{5}s+\frac{1}{5}}{s^2+1}$$

求逆变换，得

$$x_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[X_1(s)]=-2-t+\frac{2}{5}e^{2t}+e^t+\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t$$

类似可得

$$X_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}s+1 & -\frac{1}{s^2}\\ s^2+3 & \frac{1}{s-2}+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s+1 & -s\\ s^2+3 & -(s+1)\end{vmatrix}}=\frac{2}{s-1}+\frac{\frac{2}{5}s+\frac{4}{5}}{s^2+1}+\frac{\frac{3}{5}}{s-2}-\frac{3}{5}-\frac{3}{s^2}$$

求逆变换，得

$$x_2(t)=\mathcal{L}^{-1}[X_2(s)]=2e^t+\frac{2}{5}\cos t+\frac{4}{5}\sin t+\frac{3}{5}e^{2t}-3-3t$$

于是，该初值问题的解为

$$\begin{cases}x_1(t)=-2-t+e^t+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t\\ x_2(t)=-3-3t+2e^t+\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{2}{5}\cos t+\frac{4}{5}\sin t\end{cases}$$

求解下列变系数线性方程组(习题 481～习题 483)

【481】 $\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt}-x-3y=t \\ t\dfrac{dy}{dt}-x+y=0 \end{cases}$

解 作变换，令 $e^{\tau}=t$，则

$$t\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau},\qquad t\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\tau}$$

那么，原方程组变为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}=x+3y+e^{\tau} \\ \dfrac{dy}{d\tau}=x-y \end{cases} \tag{1}$$

先求相应的齐次方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}=x+3y \\ \dfrac{dy}{d\tau}=x-y \end{cases}$$

的通解. 其特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+2)=0$$

特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$.

相应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0$$

即 $a=3b$. 令 $b=1$，则 $a=3$，那么相应于 $\lambda_1=2$ 的特解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=e^{2\tau}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=-b$. 令 $b=-1$，则 $a=1$，那么相应于 $\lambda_2=-2$ 的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-2\tau}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

所以，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{2\tau}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-2\tau}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

由常数变易法知，非齐次方程组(1)有形如

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=C_1(\tau)e^{2\tau}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+C_2(\tau)e^{-2\tau}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

的特解. 其中 $C_1'(\tau)$，$C_2'(\tau)$满足

$$\begin{cases}C_1'(\tau)\cdot 3e^{2\tau}+C_2'(\tau)e^{-2\tau}=e^{\tau}\\C_1'(\tau)e^{2\tau}-C_2'(\tau)e^{-2\tau}=0\end{cases}$$

解之得

$$C_1'(\tau)=\frac{1}{4}e^{-\tau},\qquad C_2'(\tau)=\frac{1}{4}e^{3\tau}$$

积分得

$$C_1(\tau)=-\frac{1}{4}e^{-\tau},\qquad C_2(\tau)=\frac{1}{12}e^{3\tau}$$

因此，特解为

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=e^{\tau}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

代回原变量得

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

于是，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 t^{-2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

【482】 $\begin{cases} 2\sqrt{t}x' = 2x - y \\ 2\sqrt{t}y' = x + 2y \end{cases}$

解 作变换，令 $\xi = \sqrt{t}$，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}$$

因此，原方程组变形为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = 2x - y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} = x + 2y \end{cases}$$

易知特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

特征值 $\lambda_1 = 2 + i$，$\lambda_2 = 2 - i$.

相应于 $\lambda_1 = 2 + i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0$$

解得 $a=ib$. 令 $b=-i$，则 $a=1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=e^{(2+i)\xi}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}=e^{2\xi}\begin{pmatrix} \cos\xi+i\sin\xi \\ \sin\xi-i\cos\xi \end{pmatrix}$$

于是，方程组有实解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=e^{2\xi}\begin{pmatrix} \cos\xi \\ \sin\xi \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=e^{2\xi}\begin{pmatrix} \sin\xi \\ -\cos\xi \end{pmatrix}$$

代回原变量得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=e^{2\sqrt{t}}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{t} \\ \sin\sqrt{t} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=e^{2\sqrt{t}}\begin{pmatrix} \sin\sqrt{t} \\ -\cos\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

于是，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^{2\sqrt{t}}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{t} \\ \sin\sqrt{t} \end{pmatrix}+C_2e^{2\sqrt{t}}\begin{pmatrix} \sin\sqrt{t} \\ -\cos\sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

【483】
$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt}+6x-y-3z=0 \\ t\dfrac{dy}{dt}+23x-6y-9z=0 \\ t\dfrac{dz}{dt}+x+y-2z=0 \end{cases}$$

解　作变换，令 $t=e^{\tau}$，则原方程组转化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}=-6x+y+3z \\ \dfrac{dy}{d\tau}=-23x+6y+9z \\ \dfrac{dz}{d\tau}=-x-y+2z \end{cases}$$

其系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 3\\ -23 & 6 & 9\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-6-\lambda & 1 & 3\\ -23 & 6-\lambda & 9\\ -1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-7 & 1 & 3\\ -23 & 5 & 9\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b$，$c=2b$. 令 $b=1$，则 $a=1$，$c=2$. 那么，相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-5 & 1 & 3\\ -23 & 7 & 9\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=c=\frac{1}{2}b$. 令 $b=2$，则 $a=c=1$，那么相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{-\tau}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-8 & 1 & 3\\-23 & 4 & 9\\-1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

即 $a=-b$，$c=-3b$. 令 $b=-1$，则 $a=1$，$c=3$，那么相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{2\tau}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

再代回原变量，可得原方程组的通解

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+C_2t^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+C_3t^2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

试用算子法求解下列方程组(习题 484～习题 485)

【484】 $\begin{cases}\dot{x}-\dot{y}-y+e^t=0\\ \dot{x}+\dot{y}-y-e^{2t}=0\end{cases}$

解　用算子法将方程组改写为

$$\begin{cases}Dx-(D+1)y=-e^t\\ x+(D-1)y=e^{2t}\end{cases}$$

所以有

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-e^t & -D-1\\ e^{2t} & D-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D & -D-1\\ 1 & D-1\end{vmatrix}}=\frac{1}{D^2+1}[-(D-1)e^t+(D+1)e^{2t}]$$

$$=\frac{3e^{2t}}{D^2+1}$$

它对应非齐次方程

$$(D^2+1)x=3e^{2t},$$

则 $x=\frac{3e^{2t}}{D^2+1}$，即 $x=\frac{3}{5}e^{2t}$. 相应的齐次方程$(D^2+1)x=0$ 的通解为

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$$

由此得

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{3}{5}e^{2t} \tag{1}$$

将所给两方程相加可得

$$(D+1)x-2y=e^{2t}-e^t$$

即

$$y=\frac{1}{2}[(D+1)x+e^t-e^{2t}]$$

将(1)代入上式得

$$y=\frac{C_1+C_2}{2}\cos t+\frac{C_2-C_1}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^t+\frac{2}{5}e^{2t}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{3}{5}e^{2t}\\ y=\frac{C_1+C_2}{2}\cos t+\frac{C_2-C_1}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^t+\frac{2}{5}e^{2t}.\end{cases}$$

【485】 $\begin{cases} \dot{x}+\dot{y}=x-2y+1+e^t \\ \dot{y}+\dot{z}=-2y-z+2+e^t \\ \dot{x}+\dot{z}=x-z+3+e^t \end{cases}$

解　将方程组改写为算子方程

$$\begin{cases} (D-1)x+(D+2)y=1+e^t & (1) \\ (D+2)y+(D+1)z=2+e^t & (2) \\ (D-1)x+(D+1)z=3+e^t & (3) \end{cases}$$

先求

$$\begin{vmatrix} D-1 & D+2 & 0 \\ 0 & D+2 & D+1 \\ D-1 & 0 & D+1 \end{vmatrix}=2(D-1)(D+1)(D+2)$$

$$\begin{vmatrix} 1+e^t & D+2 & 0 \\ 2+e^t & D+2 & D+1 \\ 3+e^t & 0 & D+1 \end{vmatrix}=(D+1)(D+2)(2+e^t)$$

解方程组(1)－(3)得

$$\begin{aligned} x &=\frac{1}{2(D-1)}(2+e^t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{D-1}2+\frac{1}{D-1}e^t\right] \\ &=\frac{1}{D-1}e^t\cdot e^{-t}+\frac{1}{2}\frac{1}{D-1}e^t=e^t\frac{1}{D}e^{-t}+\frac{1}{2}e^t\frac{1}{D}\cdot 1 \\ &=-e^t\cdot e^{-t}+\frac{1}{2}te^t=-1+\frac{1}{2}te^t \end{aligned}$$

再代入(1)得

$$(D+2)y=\frac{1}{2}e^t$$

因此

$$y=\frac{1}{2}\frac{1}{D+2}e^t=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2}e^t=\frac{1}{6}e^t$$

代入(2)得

$$(D+1)z=2+\frac{1}{2}e^{t},$$

$$z=\frac{1}{D+1}\left(2+\frac{1}{2}e^{t}\right)=2e^{-t}\frac{1}{D}e^{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+1}e^{t}=2+\frac{1}{4}e^{t}$$

于是，方程组的特解为

$$\begin{cases}x^{*}=-1+\frac{1}{2}te^{t}\\ y^{*}=\frac{1}{6}e^{t}\\ z^{*}=2+\frac{1}{4}e^{t}\end{cases}$$

而方程组对应的齐次方程组为

$$\begin{cases}(D-1)x+(D+2)y=0\\ (D+2)y+(D+1)z=0\\ (D-1)x+(D+1)z=0\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}(D-1)x=0\\ (D+2)y=0\\ (D+1)z=0\end{cases}$$

易得通解

$$\begin{cases}x=C_1e^{t}\\ y=C_2e^{-2t}\\ z=C_3e^{-t}\end{cases}$$

从而原方程组的通解

$$\begin{cases} x = C_1 e^t - 1 + \frac{1}{2} te^t \\ y = C_2 e^{-2t} + \frac{1}{6} e^t \\ z = C_3 e^{-t} + 2 + \frac{1}{4} e^t . \end{cases}$$

【486】 设 m 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根. 试证明线性非齐次方程组

$$x' = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{C}e^{mt} \tag{1}$$

具有一形如

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{p}e^{mt}$$

的解, 其中 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{p}$ 为常数列向量.

证 若 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{p}e^{mt}$ 是方程组(1)的解, 则必有

$$\boldsymbol{\Phi}'(t) = m\boldsymbol{p}e^{mt} = \boldsymbol{A\Phi}(t) + \boldsymbol{C}e^{mt} = \boldsymbol{Ap}e^{mt} + \boldsymbol{C}e^{mt}$$

即有

$$m\boldsymbol{p} - \boldsymbol{Ap} = \boldsymbol{C}$$

因为 m 不是特征根, 所以$(m\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$可逆. 因此, 取 $\boldsymbol{p} = (m\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{C}$, 则有 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{p}e^{mt}$是方程组(1)的解.

【487】 设 $f(t)$是以$\frac{\pi}{2}$为周期的连续的周期函数, 对方程组

$$\begin{cases} x' + y' + x - y = f(t) & (1) \\ x' - y' - x - y = 0 & (2) \end{cases}$$

1) 求出它的通解表达式;

2) 求出它的以$\frac{\pi}{2}$为周期的周期解.

解 1) 将该方程组整理可得

$$\begin{cases} x' = y + \dfrac{1}{2} f(t) \\ y' = -x + \dfrac{1}{2} f(t) \end{cases}$$

这是一个非齐次方程组. 显然，相应的齐次方程组的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

特征值 $\lambda_1 = i$，$\lambda_2 = -i$. 相应于 $\lambda_1 = i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

即 $a = -ib$. 令 $b = i$，则 $a = 1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix}$$

于是，可得齐次方程组的两个实解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

那么，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

由常数变易法知，非齐次方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

的特解，其中 $C_1'(t)$，$C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = \dfrac{1}{2}f(t) \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \dfrac{1}{2}f(t) \end{cases}$$

解之得

$$C_1'(t) = \frac{1}{2}f(t)(\cos t - \sin t)$$

$$C_2'(t) = \frac{1}{2}f(t)(\cos t + \sin t)$$

积分得

$$C_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^t f(s)(\cos s - \sin s)\mathrm{d}s$$

$$C_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^t f(s)(\cos s + \sin s)\mathrm{d}s$$

因此

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^t f(s)(\cos s - \sin s)\mathrm{d}s \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\int_0^t f(s)(\cos s + \sin s)\mathrm{d}s \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

于是，非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t f(s)(\cos s - \sin s)\mathrm{d}s \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t f(s)(\cos s + \sin s)\mathrm{d}s \end{pmatrix} \qquad (3)$$

2）下面来求方程组(1)－(2)的以$\frac{\pi}{2}$为周期的周期解．设

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix},$$

则由(3)式有

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}^*(t)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{X}^*(t)\int_0^t \boldsymbol{X}^*(-s)\boldsymbol{F}(s)\mathrm{d}s \qquad (3)'$$

其中

$$\boldsymbol{X}^*(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}f(t)\\ \frac{1}{2}f(t)\end{pmatrix}$$

并注意到

$$\boldsymbol{X}^*(t)\boldsymbol{X}^*(s)=\boldsymbol{X}^*(t+s),\quad 及\ \det\boldsymbol{X}^*\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

(3)′中利用被积函数的变量替换可写为

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}^*(t)\boldsymbol{C}+\int_0^t \boldsymbol{X}^*(s)\boldsymbol{F}(t-s)\mathrm{d}s \qquad (4)$$

若 $\boldsymbol{X}(t)$是以$\frac{\pi}{2}$为周期的周期解，那么由(4)式并利用条件

$$f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=f(t)$$

得

$$\boldsymbol{X}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{X}^*\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{C}+\int_0^{t+\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{X}^*(s)\boldsymbol{F}(t-s)\mathrm{d}s \qquad (5)$$

(5) − (4)，并令

$$\boldsymbol{X}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\boldsymbol{X}(t)=\left[\boldsymbol{X}^*\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\boldsymbol{X}^*(t)\right]\boldsymbol{C}$$

$$+\int_t^{t+\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{X}^*(s)\boldsymbol{F}(t-s)\mathrm{d}s=0$$

即

$$\left[\boldsymbol{X}^*(t)\boldsymbol{X}^*\left(\frac{\pi}{2}\right)-\boldsymbol{X}^*(t)\right]\boldsymbol{C}+\int_t^{t+\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{X}^*(s)\boldsymbol{F}(t-s)\mathrm{d}s=0$$

对积分作变量替换，得

$$\boldsymbol{X}^*(t)\left[\boldsymbol{X}^*\left(\frac{\pi}{2}\right)-\boldsymbol{E}\right]\boldsymbol{C}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{X}^*(t+\tau)\boldsymbol{F}(-\tau)\mathrm{d}\tau=0 \qquad (6)$$

由于

$$(\boldsymbol{X}^*(t))^{-1}=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}=\boldsymbol{X}^*(-t)$$

于是(6)式可写为

$$\left(\boldsymbol{X}^*\left(\frac{\pi}{2}\right)-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{C}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{X}^*(\tau)\boldsymbol{F}(-\tau)\mathrm{d}\tau=0$$

而

$$\boldsymbol{X}^*\left(\frac{\pi}{2}\right)-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

取

$$\boldsymbol{C}^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{X}^*(\tau)\boldsymbol{F}(-\tau)\mathrm{d}\tau$$

(6)式成立，即得周期解

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}^*(t)\boldsymbol{C}^*+\int_0^t\boldsymbol{X}^*(s)\boldsymbol{F}(t-s)\mathrm{d}s\ .$$

第六章　定性与稳定性理论初步

定性理论与稳定性理论是近代常微分方程的两个基本的研究方向，在应用和理论上都具有重要价值. 它们的共同特点是在不求出方程的解的情况下，直接根据微分方程本身的结构或特点来研究解的性质，或微分方程所确定的积分曲线的分布情形. 本章所选习题与题解仅是它们的最基本的内容.

§6.1　二维自治系统与相平面

提　　要

考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=(f_1(t,\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(t,\boldsymbol{x}))^T$. 方程组(1)代表某一物理系统的运动方程，其中 t 可视为时间，而 $\boldsymbol{x}$ 代表质点的坐标和速度，在这样的解释下，把方程组(1)称为动力系统. 本章仅考虑二维动力系统.

定义 1　右端不显含 t 的二维动力系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}\quad (x,y)\in R^2 \qquad (2)$$

称为定常系统或自治系统，相应地，若 P，Q 中至少有一个显含 t，则称(2)为非定常系统或非自治系统.

我们把 xoy 平面称为(2)的相平面，而把(2)的解 $x=x(t)$，$y=y(t)$以 t 为参数在 xoy 平面上所描绘的曲线称为(2)的轨线或相轨线. 轨线族在相平面上的图象称为(2)的相图.

定理 1　假设自治系统(2)的右端函数在相平面 xoy 的某区域 D 上满足初值问题的存在惟一性定理条件，则(2)的相轨线有以下基本性质

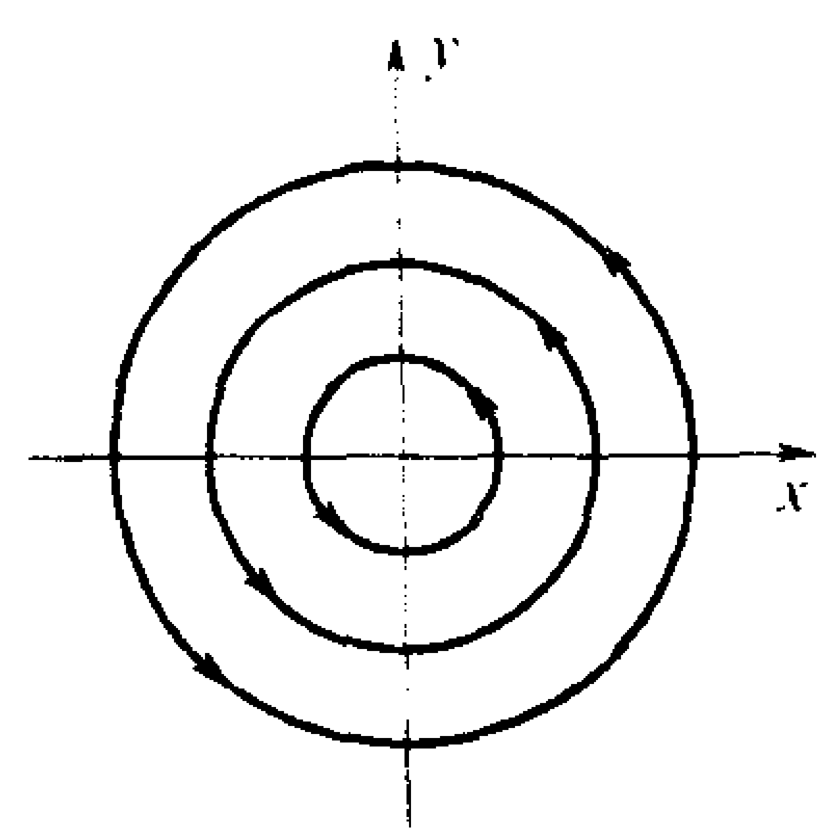
1) 设 $x=x(t)$，$y=y(t)$是自治系统(2)的一个解，则 $x=x(t+C)$，$y=y(t+C)$也是(2)的解，其中 C 是任意常数.

2) 自治系统(2)经过相平面上任意一点(x_0,y_0)存在惟一的一条轨线.

题　　解

画出下列方程组的相图(习题 488～习题 490)

【488】
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x\end{cases}$$



(第 488 题图)

解　将原方程组化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{-y} \qquad (1)$$

易求得通解

$$x^2+y^2=C^2$$

所以原方程组的相轨线是以原点为中心的圆周，它在 xoy 平面上的相图是如图所示的同心圆族.

【489】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x\\ \dfrac{dy}{dt}=-3y\end{cases}$

解 原方程组可化为

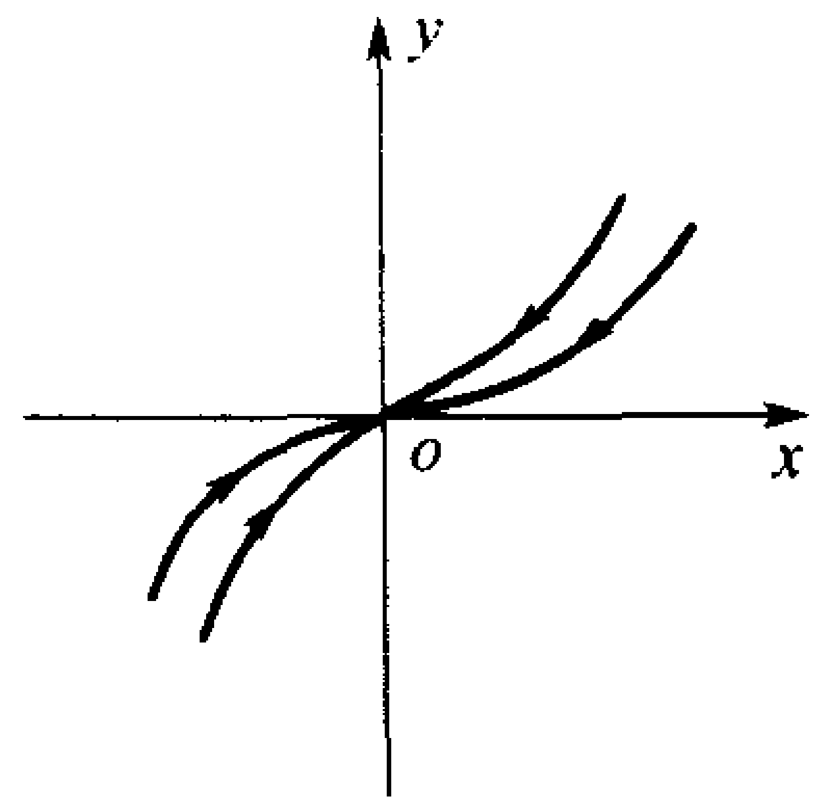
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{2x}$$

即

$$\frac{dy}{y}=\frac{3}{2}\frac{dx}{x},$$

易求得通解

$$y=Cx^{\frac{3}{2}}$$



(第 489 题图)

所以它在 xoy 平面上的相图是如图所示的立方抛物线族.

【490】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x\\ \dfrac{dy}{dt}=y\end{cases}$

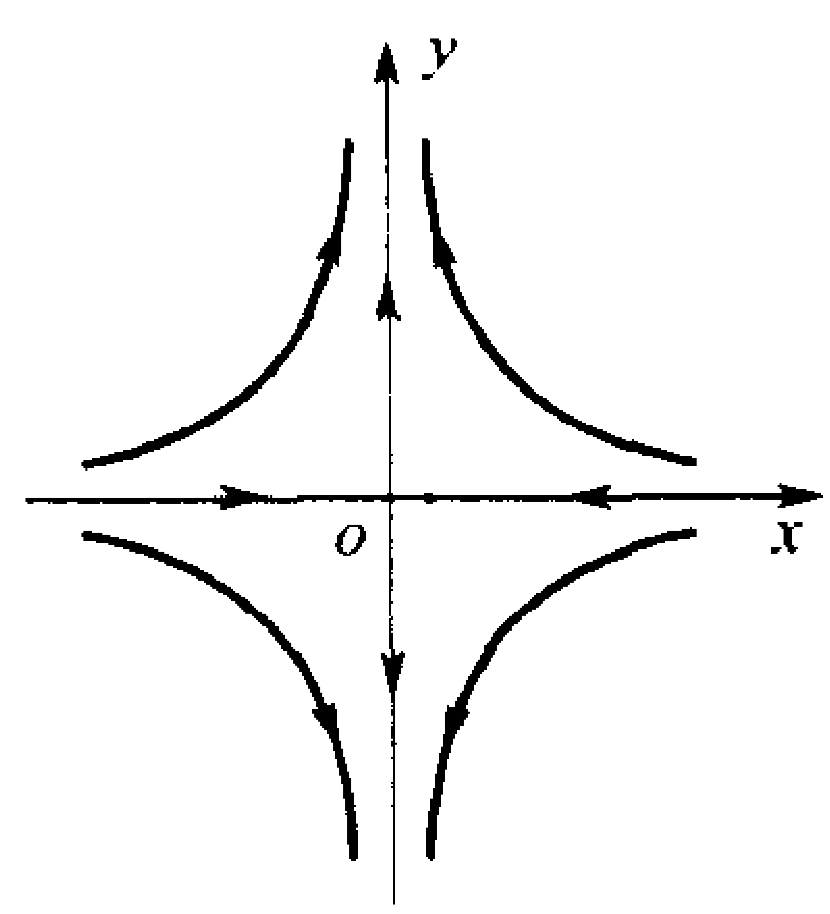
解 原方程组可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{-x}$$

易求得通解

$$xy=C$$

所以它在 xoy 平面上的相图是如图所示的双曲线族.



(第 490 题图)

§6.2　初等奇点附近轨线的分布

提　要

定义 1　二维自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)\end{cases}\qquad (x,y)\in D\subset R^2 \tag{1}$$

对点$(x_0,y_0)\in D$，若 $P^2(x_0,y_0)+Q^2(x_0,y_0)\neq 0$，则点$(x_0,y_0)$称为系统(1)的常点；若 $P^2(x_0,y_0)+Q^2(x_0,y_0)=0$，则点$(x_0,y_0)$称为系统(1)的平衡点或奇点.

以下总假设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$在某个单连通区域内连续.

二维常系数线性自治系统的一般形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy\end{cases} \tag{2}$$

它的系数矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

的特征方程是

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0.$$

将特征方程改写为

$$\lambda^2+p\lambda+q=0\quad(\text{其中 } p=-(a+d),\ q=ad-bc) \tag{3}$$

若 $q\neq 0$，$O(0,0)$是(2)的惟一奇点，称为初等奇点，方程(3)

的根即为矩阵 **A** 的特征根.

定理 1 对于系统(2),当 $q=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$ 时,$O(0,0)$是它的惟一初等奇点(简称奇点),λ_1,λ_2 为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的不为零的特征根,则可以根据特征根的不同情况将奇点 $O(0,0)$分为以下类型:

1) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 都是实数,且 $\lambda_1\lambda_2>0$

(ⅰ) $\lambda_1<0$,$\lambda_2<0$,O 为稳定结点;

(ⅱ) $\lambda_1>0$,$\lambda_2>0$,O 为不稳定结点.

2) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 都是实数,且 $\lambda_1\lambda_2<0$,O 为鞍点.

3) $\lambda_1=\lambda_2$

(ⅰ) $\lambda_1<0$,O 为稳定临界结点或退化结点;

(ⅱ) $\lambda_1>0$,O 为不稳定临界结点或退化结点.

4) λ_1,λ_2 为一对共轭复根

(ⅰ) 实部<0,O 为稳定焦点;

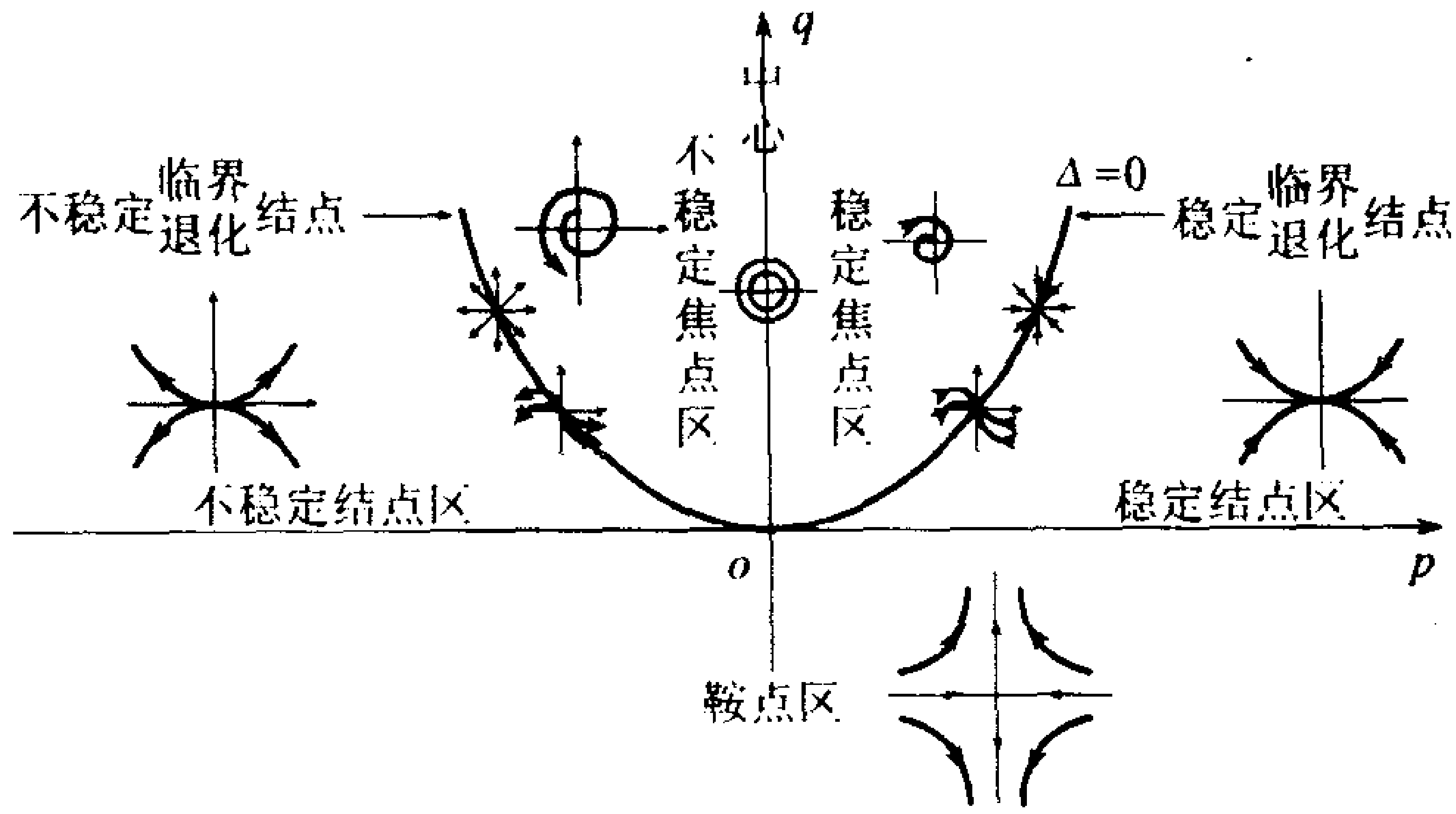
(ⅱ) 实部>0,O 为不稳定焦点;

(ⅲ) 实部$=0$,O 为中心.

因为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$,

线性自治系统(2)的奇点 $O(0,0)$附近的轨线分布完全由特征方程(3)的系数 p 和 q 确定. 记 $\Delta=p^2-4q$,奇点 $O(0,0)$的性态可全部反映在如图所示的 $p-q$ 参数平面上.

对于系统(1),不妨设 $O(0,0)$是它的奇点(对系统(1)的其它奇点(x_0,y_0)可以作平移变换,把点(x_0,y_0)移到$(0,0)$),设 $P(x,y)$,$Q(x,y)$在奇点 $O(0,0)$附近连续可微,并把(1)写成



（定理 1 图）

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by+\varphi(x,y)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dx+\psi(x,y)\end{cases}\qquad(1)'$$

其中 $a=P_x'(0,0)$，$b=P_y'(0,0)$，$c=Q_x'(0,0)$，$d=Q_y'(0,0)$.

定义 2　称二维线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy\end{cases}\qquad(2)'$$

为(1)′的一次近似系统.

定理 2　设 $O(0,0)$是(1)′及(2)′的奇点 $\varphi(x,y)$，$\psi(x,y)$ 在 $O(0,0)$点邻域关于 x,y 有一阶连续偏导数且满足

$$\varphi(x,y)=o(\rho),\quad \psi(x,y)=o(\rho),\quad (\rho=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\to 0)$$

则当 O 点是系统(2)′的结点(临界结点，退化结点除外)，鞍点或焦点，则系统(1)′与其一次近似系统在 O 点附近的轨线分布一致. 而当 O 点是(2)′的中心奇点时，则 O 点是系统(1)′的中心或焦点.

题　解

试确定下列系统的奇点及其类型，求出它的平面轨线族，并作出相图(习题491～习题496)

【491】 $\dfrac{dx}{dt}=-4x+y,\ \dfrac{dy}{dt}=-3x$

解 只有 $O(0,0)$满足

$$\begin{cases}-4x+y=0\\-3x=0\end{cases}$$

所以 $O(0,0)$是系统的惟一奇点.

特征方程为

$$\begin{vmatrix}-4-\lambda & 1\\-3 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+4)+3=(\lambda+3)(\lambda+1)=0$$

特征根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-3$ 为同号相异实根，奇点 $O(0,0)$是稳定结点.

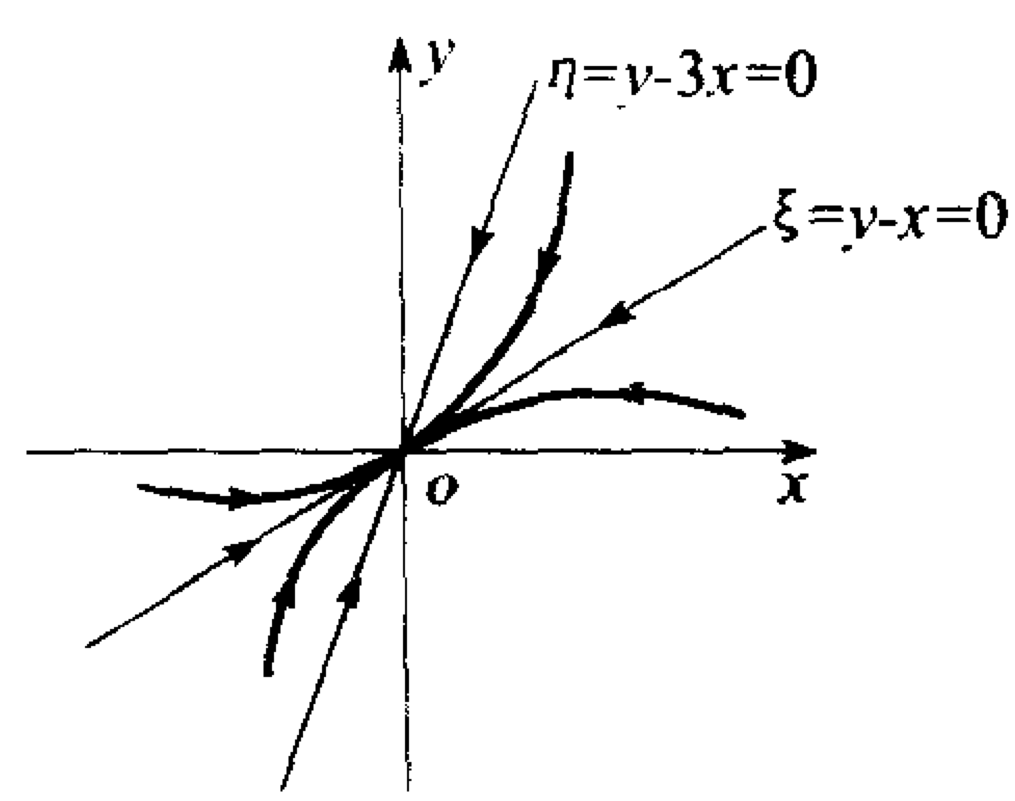
将系统改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x}{-4x+y},$$

此为齐次方程，可求其通解，即为系统的平面轨线族

$$\frac{y-3x}{(y-x)^3}=C$$

用直角坐标系表示，可作出相图见图.



(第491题图)

【492】 $\dfrac{dx}{dt}=4x+y,\quad \dfrac{dy}{dt}=-3x.$

解 $O(0,0)$为系统的惟一奇点，特征方程为

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

特征根 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$ 为同号相异实根，奇点 $O(0,0)$是不稳定结点.

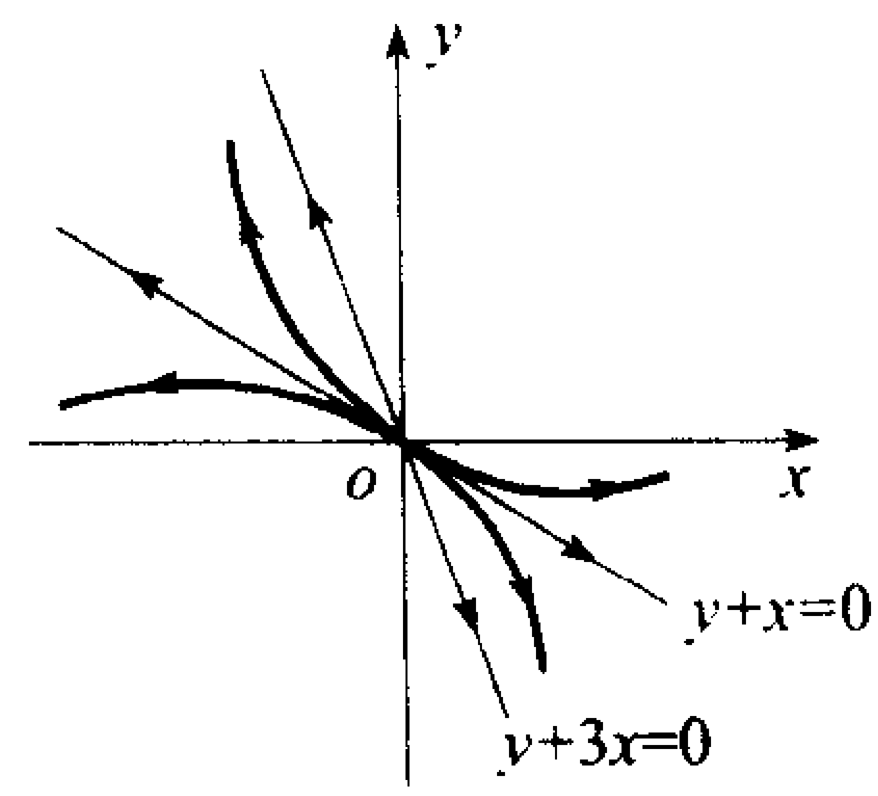
将系统改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x}{4x+y}$$

此为齐次方程，可求得通解，即得系统的平面轨线族

$$\frac{y+3x}{(y+x)^3}=C$$

的直角坐标表示. 它的相图见图.



(第 492 题图)

【493】 $\dfrac{dx}{dt}=-x-5+y$，$\dfrac{dy}{dt}=-3x$

解　此系统的奇点为(0,5). 作平移变换：$\xi=x$，$\eta=y-5$，则原方程组变为

$$\frac{d\xi}{dt}=-\xi+\eta,\qquad \frac{d\eta}{dt}=-3\xi \tag{1}$$

则 $O(0,0)$为(1)的奇点，特征方程为

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda+3=0$$

特征根 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$是一对共轭复根，实部为 $-\dfrac{1}{2}$，奇点 O 为(1)的稳定的焦点，因而奇点(0,5)为原系统的稳定的焦点.

由(1)得

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{-3\xi}{-\xi+\eta}$$

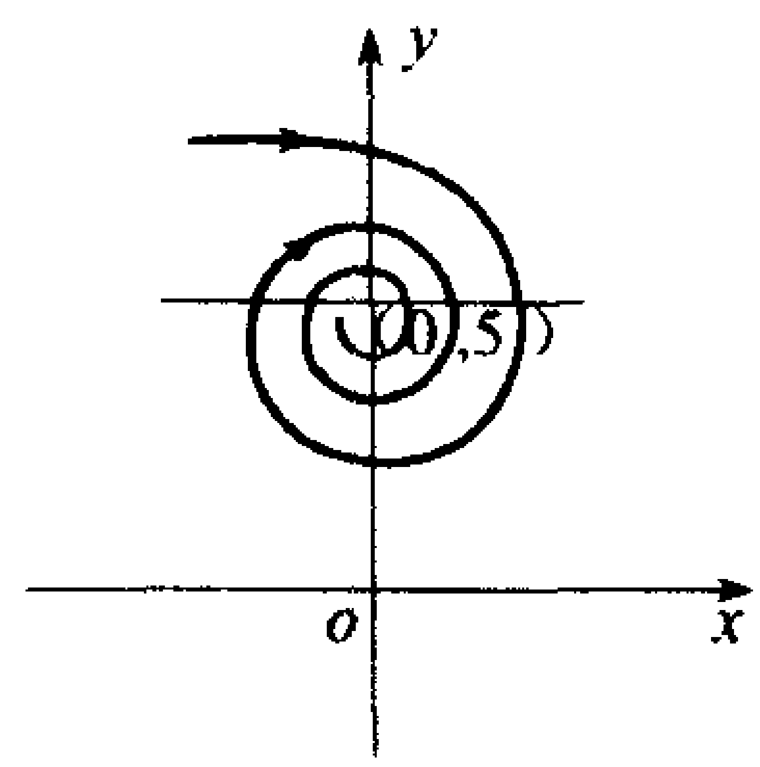
这是齐次方程，易求得通解

$$\eta^2-\xi\eta+3\xi^2=C\exp\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2\eta-\xi}{\xi\sqrt{11}}\right)$$

代回原变量，原系统的平面轨线族为

$$(y-5)^2-x(y-5)+3x^2=C\exp\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2y-x-10}{\sqrt{11}x}\right)$$

它的相图见图.



（第 493 题图）

【494】 $\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-2x-3y$

解 $O(0,0)$为系统的惟一奇点. 特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

特征根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$ 为同号相异实根，所以奇点 $O(0,0)$ 为稳定结点.

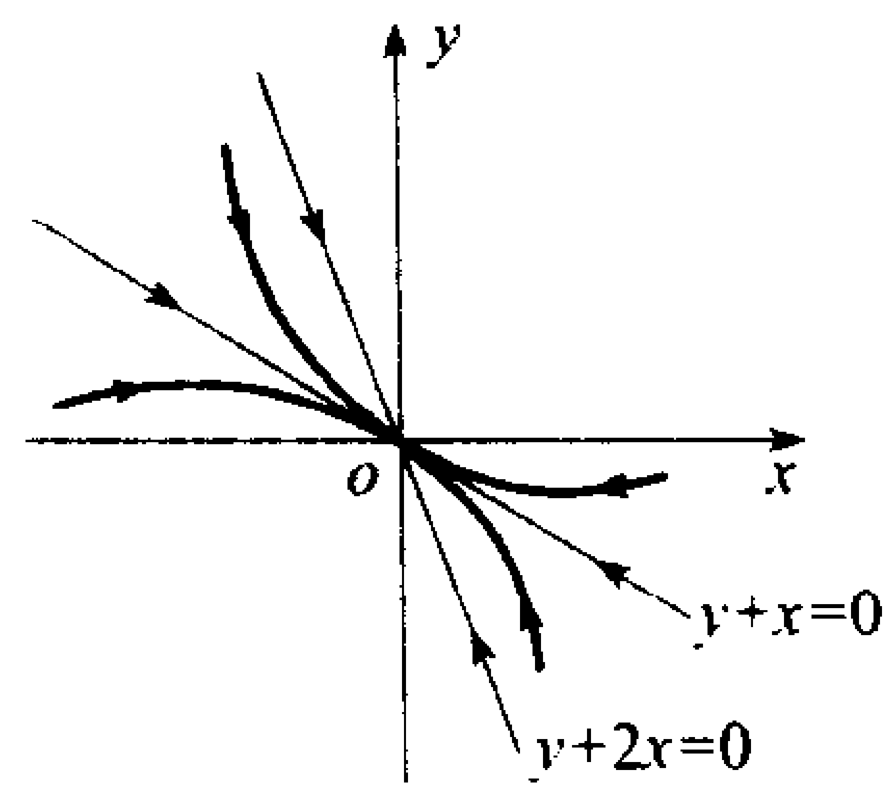
将系统改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-3y}{y} \tag{1}$$

求解(1)即求得系统的平面轨线族

$$\frac{(y+2x)^2}{y+x}=C.$$

相图见图.



（第 494 题图）

【495】 $\frac{dx}{dt}=y$，$\frac{dy}{dt}=-2x+3y$

解 $O(0,0)$为系统的奇点．特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

特征根 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$ 为同号相异实根，所以奇点$(0,0)$是不稳定结点．

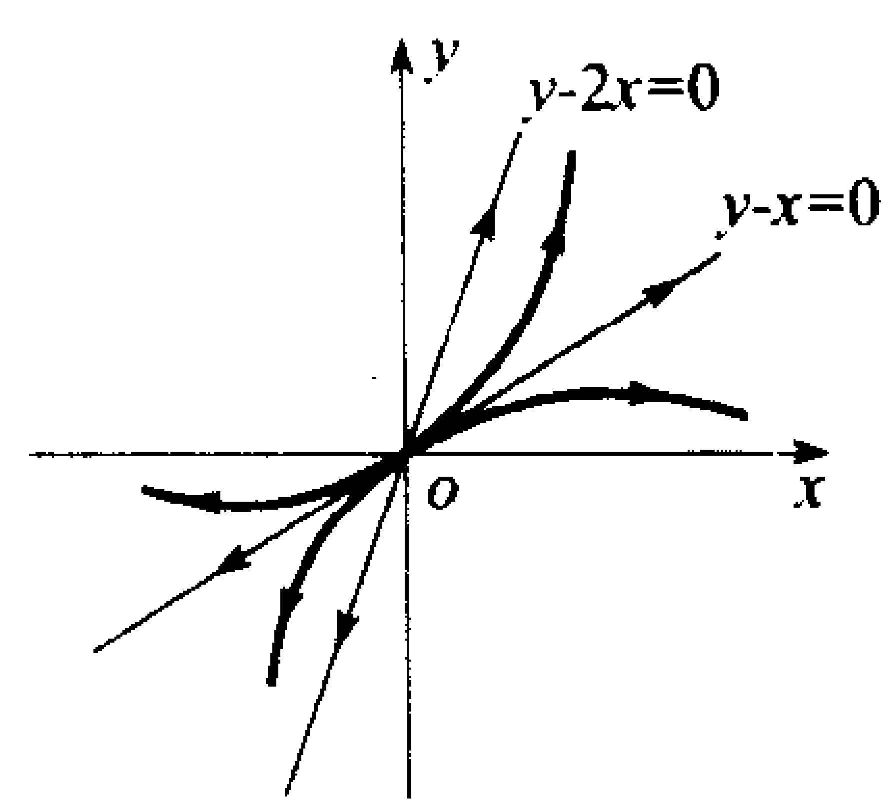
将系统改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+3y}{y} \qquad (1)$$

求解(1)即得系统的平面轨线族

$$\frac{(y-2x)^2}{y-x}=C$$

它的相图见图．



（第 495 题图）

【496】 $\frac{dx}{dt}=y$，$\frac{dy}{dt}=-2x-2y-5$．

解 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$为系统的奇点．作平移变换：$\xi=x+\frac{5}{2}$，$\eta=y$，则原方程组化为

$$\frac{d\xi}{dt}=\eta,\quad \frac{d\eta}{dt}=-2\xi-2\eta \qquad (1)$$

则(1)的奇点为 $O(0,0)$. 特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda+2=0$$

特征根 $\lambda_{1,2}=-1\pm i$ 是实部为 -1 的一对共轭复根，所以奇点 O 为(1)的稳定焦点，即奇点$\left(-\frac{5}{2},0\right)$是原系统的稳定焦点.

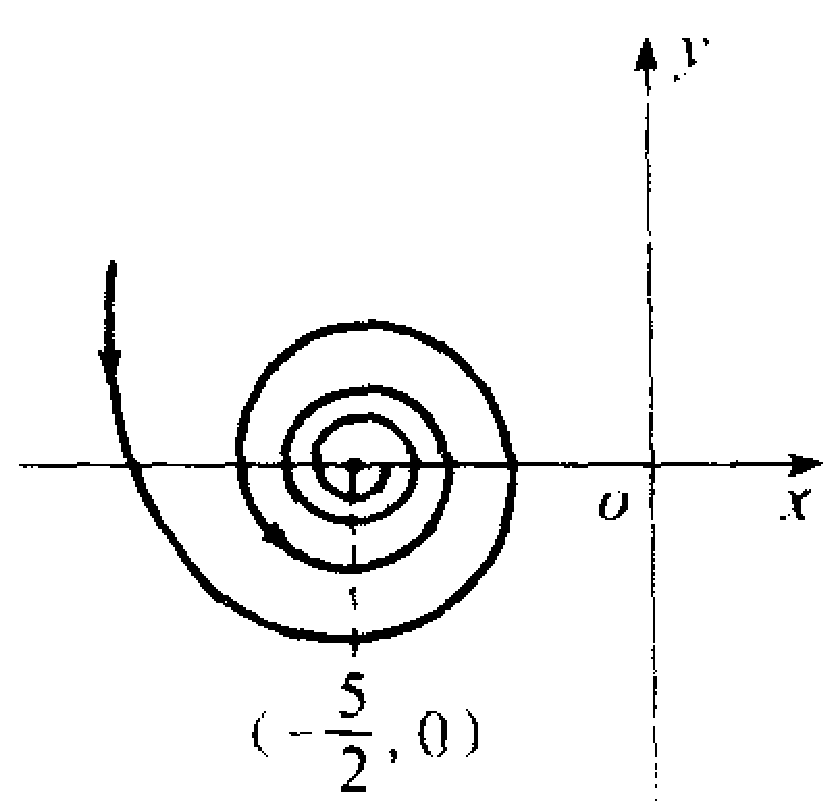
由原方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-2x-2y-5}{y} \tag{2}$$

求解(2)即得系统的平面轨线族

$$\left(x+y+\frac{5}{2}\right)^2+\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=C\exp\left\{2\arctan\frac{x+y+\frac{5}{2}}{x+\frac{5}{2}}\right\}$$

它的相图见图.



(第 496 题图)

【497】 详细讨论系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-\frac{3}{4}y,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=7x-4y$$

奇点邻域的轨线分布.

解 由系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{3}{4}\\ 7 & -4\end{pmatrix}$$

知

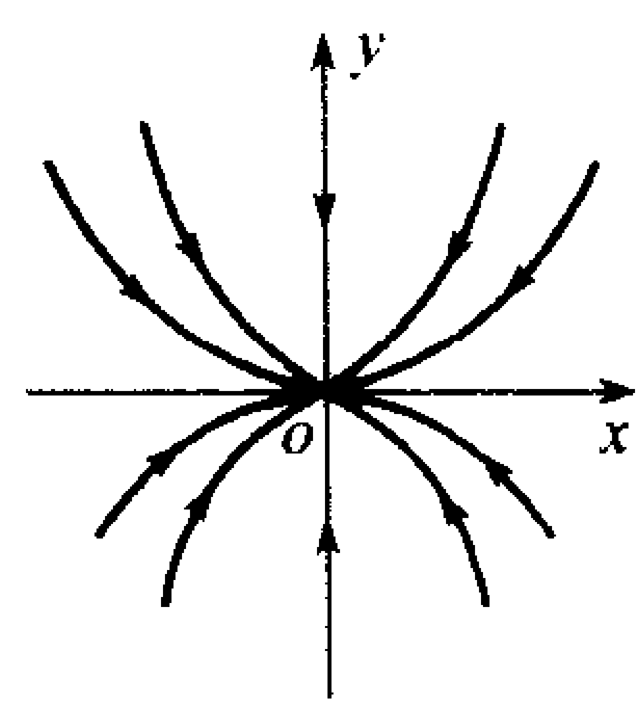
$$p=-(a+d)=-(1-4)=3>0,$$

$$q=ad-bc=-4+\frac{21}{4}=\frac{5}{4}>0$$

其中 $a=1$，$b=-\dfrac{3}{4}$，$c=7$，$d=-4$.

$$\Delta=p^2-4q=4>0$$

故系统的惟一奇点 $O(0,0)$是稳定的结点，它的轨线分布图见图.



（第 497 题图）

【498】 确定系统

$$\frac{dx}{dt}=f(x)+y,\qquad \frac{dy}{dt}=-3x$$

的奇点及类型，其中

$$f(x)=\begin{cases}-4x, & x>0;\\ 4x, & -1<x\leqslant 0;\\ -x-5 & x\leqslant -1.\end{cases}$$

解　由习题 491，492，493 知

当 $x>0$ 时，奇点(0,0)为稳定结点；

当 $-1<x\leqslant 0$ 时，奇点 $(0,0)$ 为不稳定结点；

当 $x\leqslant -1$ 时，奇点 $(0,5)$ 为稳定焦点.

【499】 指出系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+4y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+7y\end{cases}$$

的奇点类型，并画出奇点邻域内的相图.

解 显然奇点是 $O(0,0)$，对应特征方程是

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 2 & 7-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-12\lambda+27=0$$

两特征根 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=9$ 为大于零的相异实数，所以奇点 O 是不稳定结点.

λ_1 和 λ_2 分别对应特征向量

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

则由代数知识可知，令

$$T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

使矩阵

$$J=TAT^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

其中 $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 7\end{pmatrix}$. 作变换

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

即

$$\xi=2x+y, \qquad \eta=-x+y,$$

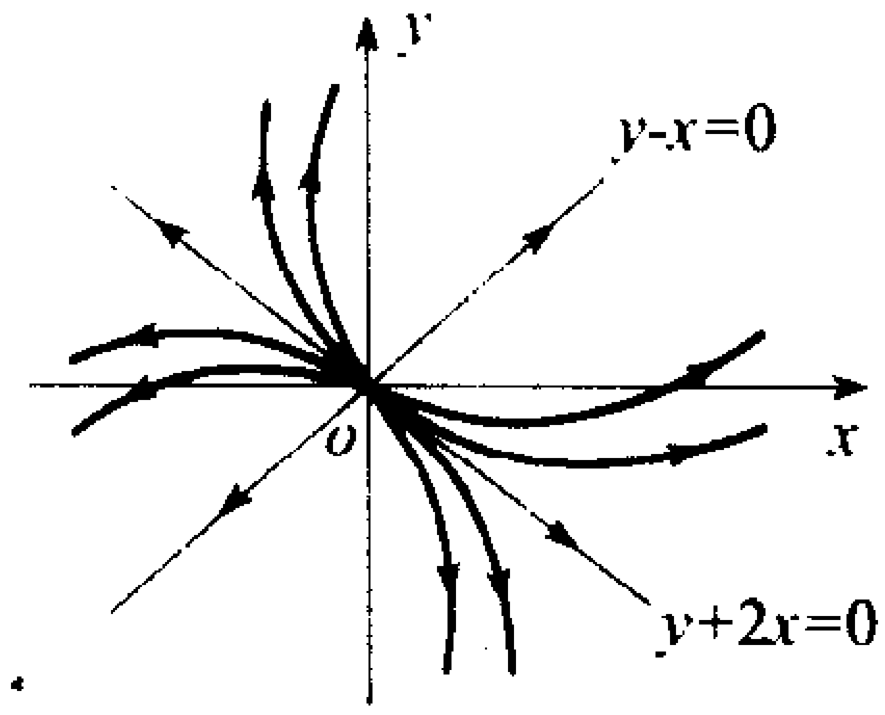
原系统可化为

$$\frac{d\xi}{dt}=3\xi, \qquad \frac{d\eta}{dt}=9\eta$$

因而

$$2x+y=0, \qquad y-x=0$$

也是原系统的轨线，它的相图如图.



（第 499 题图）

【500】 指出系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x+y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x-2y\end{cases}$$

的奇点类型，并画出奇点邻域内的相图.

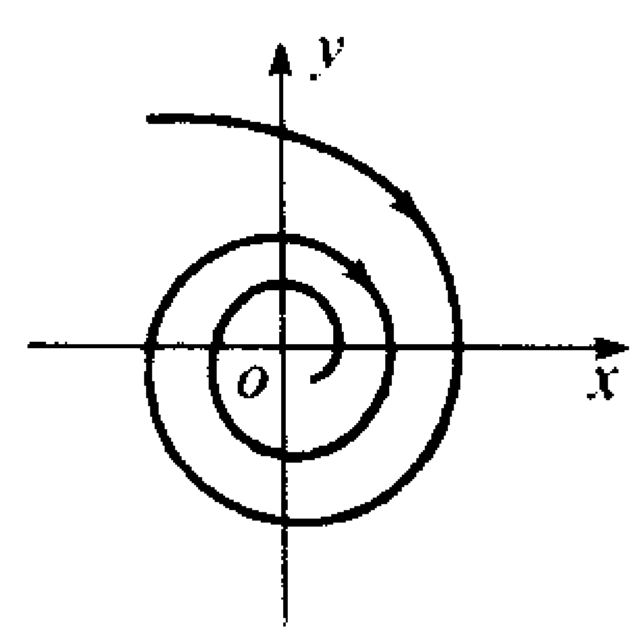
解　奇点 $O(0,0)$对应的特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+5=0$$

因而 $p=4>0$，$q=5>0$，$\Delta=p^2-4q=-4<0$，所以奇点 O 是稳定焦点，轨线是一族环绕原点 O 作无限旋转的螺线. 为了明确旋转方向，在 y 轴正半轴上任取一点 $(0,y)$，在该点处

$$\frac{dx}{dt}=y>0$$

由此推知轨线是按顺时针方向旋转的，如图.



（第 500 题图）

【501】 确定系统

$$\frac{dx}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=x(a^2-x^2)+by \quad (ab\neq0)$$

的奇点 $O(0,0)$的类型，并作出相图.

解 这是一个非线性系统，可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+\varphi(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a^2x+by+\psi(x,y),\end{cases}$$

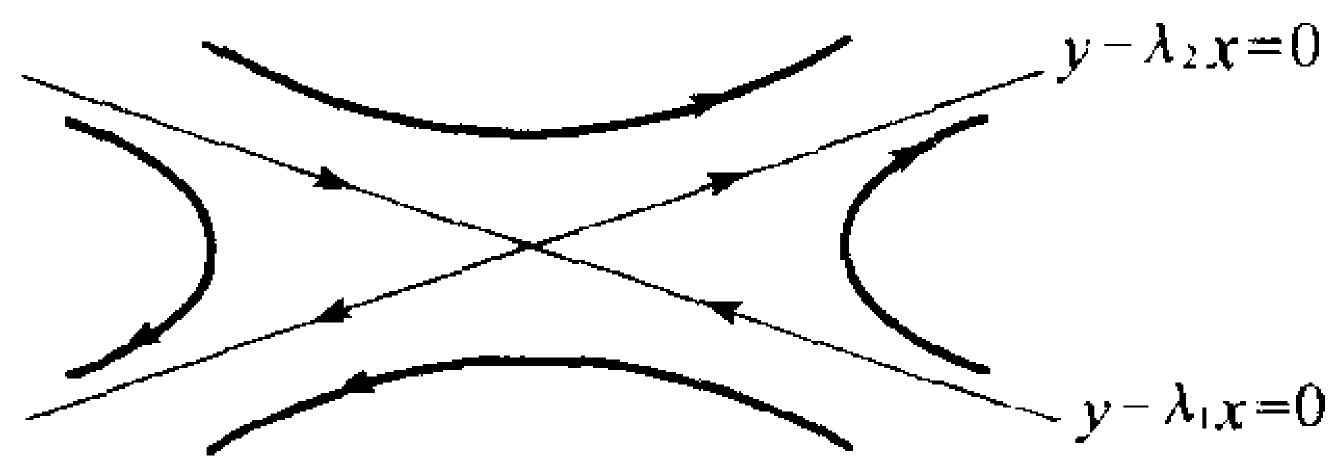
其中 $\varphi(x,y)=0$，$\psi(x,y)=-x^3$ 满足定理2的条件. 它的一次近似系统为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a^2x+by \tag{1}$$

$O(0,0)$也是(1)的奇点，特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ a^2 & b-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-b\lambda-a^2=0$$

特征根 $\lambda_{1,2}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4a^2}}{2}$ 为异号的两实根，由定理1，2知 $O(0,0)$，为系统(1)的鞍点，它的相图见图.



（第501题图）

【502】 确定系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a(1-x^2)y-bx\quad (a>0,\ b\neq0)$$

的奇点及类型.

解 将系统写为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+\varphi(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=-bx+ay+\psi(x,y)\end{cases}$$

其中 $\varphi(x,y)\equiv 0$，$\psi(x,y)=-ax^2y$ 满足定理 2 的条件. 可考虑它的一次近似系统

$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \frac{dy}{dt}=-bx+ay \tag{1}$$

奇点 $O(0,0)$是原系统及(1)的奇点，特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -b & a-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-a\lambda+b=0$$

特征根 $\lambda_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

当 $a^2\geqslant 4b$ 时，两特征根 λ_1，λ_2 相异，并且都大于 0，奇点 $O(0,0)$为原系统的不稳定结点.

当 $a^2<4b$ 时，两特征根为一对共轭复根，奇点 $O(0,0)$为原系统的不稳定焦点.

【503】 确定系统

$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \frac{dy}{dt}=-ay-b\sin x\quad (a\geqslant 0,\ b>0)$$

的奇点 $O(0,0)$的类型.

解 原系统可写为

$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \frac{dy}{dt}=-bx-ay-b\sin x+bx$$

它的一次近似系统为

$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \frac{dy}{dt}=-bx-ay \tag{1}$$

$\varphi(x,y)\equiv 0$，$\psi(x,y)=bx-b\sin x$ 满足定理 2 的条件. (1)的

特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

特征根

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

1）当 $a^2 \geqslant 4b$ 时，奇点 $O(0,0)$为稳定结点；

2）当 $0 < a^2 < 4b$ 时，奇点 $O(0,0)$为稳定焦点；

3）当 $a=0$ 时，$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{b}i$ 奇点$O(0,0)$为一次近似系统的中心，这时 $O(0,0)$可能为原系统的中心，也可能为焦点.

【504】 研究范德坡(Van der pol)方程

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

的平衡位置$\left(\ddot{x} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2},\ \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$

解 化方程为等价组

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon y - \varepsilon x^2 y$$

显然 $O(0,0)$是惟一的平衡点.

由于非线性项 $\varphi(x,y)=0$，$\psi(x,y) = -\varepsilon x^2 y$ 满足定理 2 的条件，所以奇点 O 的类型由线性部分决定(除中心外)，相应的线性系统的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

所以 $p = -\varepsilon < 0$，$q = 1$，$\Delta = p^2 - 4q = \varepsilon^2 - 4$，$O$ 的类型与参数ε 有关，

当 $\varepsilon^2 - 4 > 0$ 时，O 为不稳定结点；

当 $\varepsilon^2-4=0$ 即当 $\varepsilon=2$ 时，O 为不稳定退化结点；

当 $\varepsilon^2-4<0$ 时，O 为不稳定焦点.

【505】 指出系统

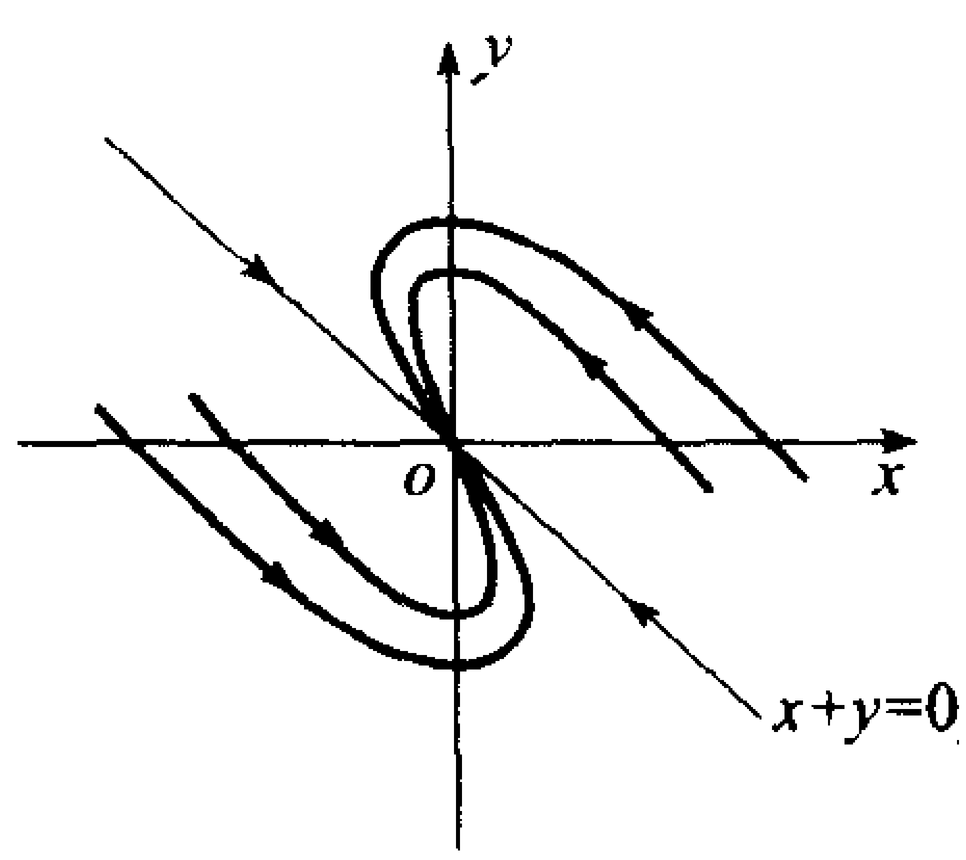
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x-2y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=2x+y\end{cases}$$

的奇点类型，并画出奇点邻域内的相图.

解 奇点 $O(0,0)$对应的特征方程是

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 是二重根，故奇点 O 是稳定的退化结点. $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$是 λ_1 对应的特征向量，这时直线 $x+y=0$ 也是原系统的轨线. 在 x 正半轴上任取一点$(x,0)$，在该点处$\dfrac{dy}{dt}=2x>0$，因此，轨线指向上，如图.



（第 505 题图）

【506】 求系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y+\sin x\\ \dfrac{dy}{dt}=1-y-e^{y}\end{cases}$$

的奇点，确定它的类型，并画出奇点邻域内的相图.

解 令系统右端等于0，得

$$\begin{cases}x+2y+\sin x=0\\ 1-y-e^{y}=0\end{cases}$$

求得惟一奇点 $O(0,0)$.

将 $\sin x$ 与 e^{y} 分别在 $x=0$，$y=0$ 按泰勒(Taylor)公式展开得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y+x-\dfrac{1}{3}x^{3}+\cdots=2x+2y+\varphi(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=1-y-\left(1+y+\dfrac{y^{2}}{2!}+\cdots\right)=-2y+\psi(x,y)\end{cases}$$

其中 $\varphi(x,y)$，$\psi(x,y)$满足定理2的条件. 上述系统的一次近似系统为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2y\end{cases}$$

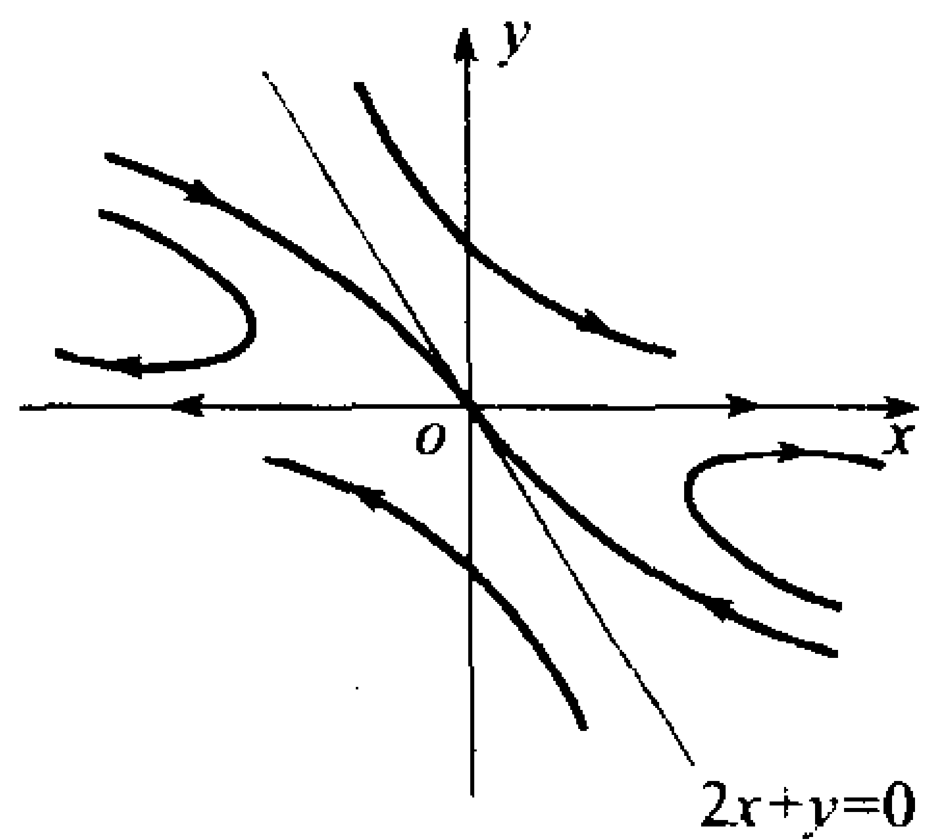
对应的特征方程、特征根 λ_1，λ_2 和相应于 λ_1，λ_2 的特征向量分别是

$$\lambda^{2}-4=0,\qquad \lambda_1=-2,\qquad \lambda_2=2$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

因而一次近似系统的奇点 O 是鞍点. 由定理2知原系统的奇

点 O 也是鞍点. 两特征向量对应的直线分别是 $2x+y=0$, $y=0$, 相图如图.



(第 506 题图)

§6.3 极　限　环

提　　要

定义 1　设系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)\end{cases}\tag{1}$$

具有闭轨线 C, 若在 C 的充分小的邻域中, 除 C 之外, 轨线都不是闭轨线, 且这些非闭轨线当 $t\to+\infty$(或 $t\to-\infty$)都分别盘旋地趋于闭轨线 C, 则称闭轨线 C 是孤立的. 系统(1)的孤立闭轨线称为它的极限环(周期解). 极限环 C 将平面分为两个区域:内域和外域.

定义 2　设 C 是系统(1)的极限环, 如果在 C 的内域靠近 C 的轨线当 $t\to+\infty(-\infty)$时盘旋地趋于 C, 则称 C 是内稳定(内不稳定)的; 如果在 C 的外域靠近 C 的轨线当 $t\to+\infty$

$(-\infty)$时盘旋地趋于 C，则称 C 是外稳定(外不稳定)的；如果 C 是内、外稳定(内、外不稳定)的，则称 C 是稳定(不稳定)的；如果 C 是内稳定外不稳定的或内不稳定外稳定的，则称 C 是半稳定的.

题　　解

【507】 求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x(x^2+y^2-1)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x-y(x^2+y^2-1)\end{cases}\tag{1}$$

的极限环并判定其稳定性，作出相图.

解　作极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$r^2=x^2+y^2,\qquad \frac{dr}{dt}=\cos\theta\frac{dx}{dt}+\sin\theta\frac{dy}{dt}$$

将(1)的右端代入上式，并整理得

$$\frac{dr}{dt}=-r(r^2-1)$$

由 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$，得

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}}{x^2+y^2}$$

将(1)的右端代入上式并整理得

$$\frac{d\theta}{dt}=1$$

即原方程组经极坐标变换后化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-r(r^2-1),\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1\end{cases}\tag{2}$$

求解(2)，易得(2)有两个特解

$$\begin{cases}r=0\\ \theta=t-t_0\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}r=1\\ \theta=t-t_0\end{cases}$$

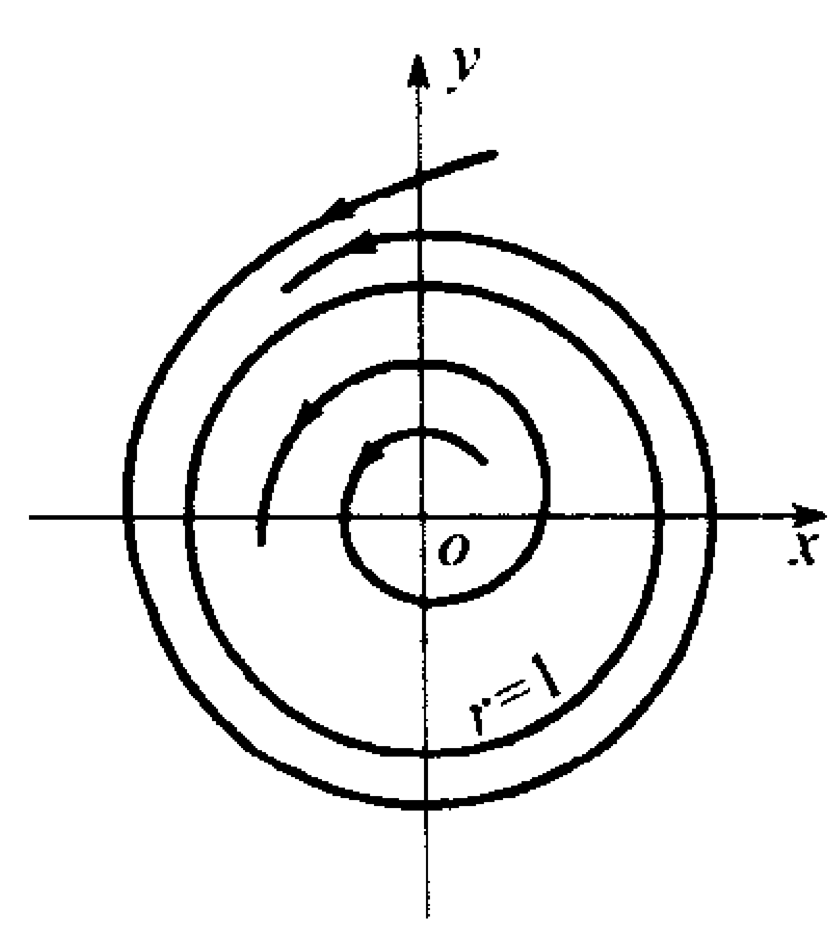
第一个特解就是奇点 $O(0,0)$，第二个特解是以原点为中心，半径为 1 的圆．(2)的通解

$$\begin{cases}r^2=\dfrac{C}{C+e^{-2t}}\\ \theta=t-t_0\end{cases}\tag{3}$$

不是闭轨，所以 $r=1$ 是系统的极限环．

对轨线族(3)，当 $r>1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$，即 $t\to+\infty$时，$r\to1$；

当 $r<1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$，即 $t\to+\infty$时，$r\to1$，而 $\theta(t)=t-t_0$，当 $t\to+\infty$时，$\theta(t)\to+\infty$．也就是说，当 $t\to+\infty$时，$r=1$ 两侧的轨线盘旋趋近于 1，所以 $x^2+y^2=1$ 是(1)的稳定的极限环(见图)．



(第 507 题图)

【508】 求方程组

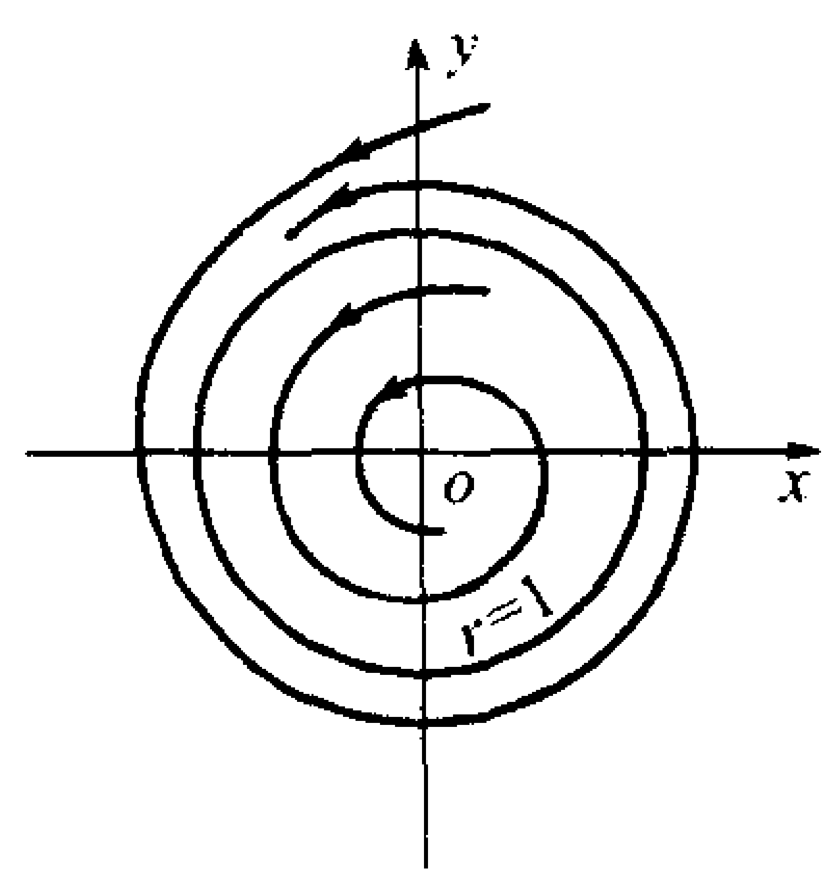
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y - x(x^2+y^2-1)^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y(x^2+y^2-1)^2 \end{cases} \tag{1}$$

的极限环，并判定其稳定性，作出相图.

解 作变换 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，原方程组可化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -r(r^2-1)^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1 \end{cases} \tag{2}$$

同前题的讨论知，$r=1$，即 $x^2+y^2=1$ 是原系统的一条极限环，且当 $r>1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$，即 $t\to+\infty$时，$r\to1$. 当 $r<1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$,即 $t\to-\infty$时，$r\to1$，而 $\theta(t)=t-t_0$，当 $t\to+\infty$时，$\theta(t)\to+\infty$. 由于 $r=1$ 的外侧轨线，当 $t\to+\infty$时盘旋趋于 $r=1$，所以 $r=1$ 是外稳定的，而 $r=1$ 的内侧轨线，当 $t\to-\infty$时，盘旋趋于 $r=1$，所以 $r=1$ 为内侧不稳定的. 见图，系统(1)的极限环 $x^2+y^2=1$ 是半稳定的.



(第 508 题图)

【509】 求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y - x(\sqrt{x^2+y^2}-1)(\sqrt{x^2+y^2}-2) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y(\sqrt{x^2+y^2}-1)(\sqrt{x^2+y^2}-2) \end{cases} \tag{1}$$

的极限环，并判定其稳定性.

解 作变换 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，则原方程组可化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=-r(r-1)(r-2)\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1\end{cases}\tag{2}$$

求解(2)，得三个特解 $r=0$，$r=1$，$r=2$ 及通解

$$\begin{cases}r(t)=1\pm\dfrac{|r_0-1|}{\sqrt{(r_0-1)^2-r_0(r_0-2)e^{-2t}}}\\ \theta(t)=t+\theta_0\end{cases}$$

其中 $r_0=r(0)$，$\theta_0=\theta(0)$，所以原系统有两条极限环 $r=1$，$r=2$.

又

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=0,\qquad \lim_{t\to-\infty}\theta(t)=-\infty.$$

及

当 $0<r_0<1$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}r(t)=0$，$\lim\limits_{t\to-\infty}r(t)=1$；

当 $1<r_0<2$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}r(t)=2$，$\lim\limits_{t\to-\infty}r(t)=1$；

当 $r_0>2$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}r(t)=2$.

由此知，$r=1$ 为不稳定极限环，$r=2$ 为稳定极限环.

【510】 确定方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2)\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2)\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

的极限环，并判定其类型.

解 作变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则原方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r^3\sin\dfrac{\pi}{r}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1\end{cases}$$

每个圆周 C_n：$r=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$都是极限环，且当 $r>1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$；当$\dfrac{1}{2m}<r<\dfrac{1}{2m-1}$时，$m=1,2,\cdots$，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$；当$\dfrac{1}{2m+1}<r<\dfrac{1}{2m}$时，$m=1,2,\cdots,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$. 由于 $\theta=t+\theta_0$，$t\to+\infty(-\infty)$时，$\theta(t)\to+\infty(-\infty)$，所以在两个相邻 C_n，C_{n+1}之间的每条轨线当 $t\to\pm\infty$时，分别盘旋趋于这两条闭轨线. C_1 是不稳定的，C_2 是稳定的，…，即 C_n 的稳定性和不稳定性是间隔排列的.

【511】 确定方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+x(x^2+y^2)\sin^2\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y(x^2+y^2)\sin^2\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

的极限环，并判定其类型.

解 作变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，原方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r^3\sin^2\dfrac{\pi}{r},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1\end{cases}$$

每个圆周 C_n：$r=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$都是极限环，并且当 $r>1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$；当$\dfrac{1}{n+1}<r<\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$. 又由于 $\theta=t+\theta_0$，故当 $t\to\pm\infty$时，$\theta(t)\to\pm\infty$，所以在两个相邻极限环

C_n，C_{n+1}之间的轨线当 $t\to+\infty$时，盘旋趋于 C_n. 当 $t\to-\infty$时，轨线盘旋趋于 C_{n+1}，故每条极限环 C_n 都是(内稳定及外不稳定)半稳定的.

【512】 证明方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \frac{dy}{dt}=-x+y(1-x^2-y^2)$$

有惟一的闭轨 C: $x^2+y^2=1$, 并证明它是稳定的极限环.

证 作变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 原方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(1-r^2)\sin^2\theta\\[2ex]\dfrac{d\theta}{dt}=-1+(1-r^2)\sin\theta\cos\theta\end{cases}$$

所以 $r=1$, 即 $x^2+y^2=1$ 是惟一的闭轨, 且当 $r<1$ 时, $\frac{dr}{dt}>0$, 即 $r=1$ 内部轨线当 $t\to+\infty$时, 盘旋趋于 $r=1$.

当 $r>1$ 时, $\frac{dr}{dt}<0$, 即 $r=1$ 外部轨线当 $t\to+\infty$时, 盘旋趋于 $r=1$.

所以极限环 C 是稳定的.

【513】 设方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\qquad \frac{dy}{dt}=Q(x,y)$$

$P(x,y)$, $Q(x,y)$在单连通域 D 内存在一阶连续偏导数并满足条件:$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$保持常号, 且不在 D 的任何子区域中恒等于零, 求证方程组在 D 内无闭轨线, 因而更没有极限环.

证 用反证法. 假设原方程组有一条闭轨线 C, C 连同其内部区域G 全部被包含在D 内, 因为 D 是单连通的, 于是由Green公式有

$$\oint_C P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x = \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式左边为 $\oint_C (P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x) = \oint_C (PQ - QP)\mathrm{d}t = 0$，而右边被积函数在 G 中保持常号且不恒等于零，故二重积分不等于零，得矛盾. 因此原方程组在 D 内不存在闭轨线.

【514】 设函数 $B(x,y)$，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内有一阶连续的偏导数，且 $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \neq 0$，试证方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x,y)$$

在区域 D 内无闭轨线.

证 用反证法. 设原方程在 D 内存在闭轨线 C，C 所包围的区域设为 G，则由 Green 公式有

$$\oint_C BP\mathrm{d}y - BQ\mathrm{d}x = \iint_G \left(\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由假设 $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \neq 0$，因而上式右端不等于零. 而左边

$$\oint_C BP\mathrm{d}y - BQ\mathrm{d}x = \oint_C \left(BP\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - BQ\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \oint_C (BPQ - BPQ)\mathrm{d}t = 0$$

得矛盾，因而结论成立.

【515】 设函数 $B(x,y)$，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在环状区域 D 内有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \neq 0$. 试证明方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x,y)$$

在区域 D 内最多有一条闭轨线.

证　用反证法. 假设方程组在 D 内有两条闭轨线 C_1, C_2. C_1, C_2 所围区域记作 G, 则由 Green 公式有

$$\oint_{C_1+C_2} BP\mathrm{d}y - BQ\mathrm{d}x = \iint_G \left(\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \neq 0$, 不妨设 $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} > 0$, 则上式右端大于零, 而左端

$$\oint_{C_1+C_2} BP\mathrm{d}y - BQ\mathrm{d}x$$

$$= \oint_{C_1}(BPQ - BQP)\mathrm{d}t + \oint_{C_2}(BPQ - BQP)\mathrm{d}t = 0$$

得矛盾, 因而结论成立.

§6.4　稳定性理论初步

提　要

考虑非定常的向量方程组或动力系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

(1)代表某一物理系统的运动方程, 其中 t 表示时间, (1)的每一个特解对应一个特定的运动. 以下总假设 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$在 $I \times D$ 上连续且对 $\boldsymbol{x}$ 满足局部李普希兹条件, $I \subset R$, 区域 $D \subset R^n$.

定义 1 设(1)的一个特解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$，它在$[t_0,+\infty)$上有定义，如果对任给 $\varepsilon>0$，恒存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使所有初值 $x_0\in D$ 满足

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|<\delta(\varepsilon) \tag{2}$$

的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$都在 $t\geqslant t_0$ 上有定义，并且当 $t\geqslant t_0$ 时

$$\|\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|<\varepsilon \tag{3}$$

则称解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是在李雅普诺夫(Liapunov)意义下稳定的.

按照李雅普诺夫的说法，对应于解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$的运动称为未受干扰的运动，而对应于其它解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$的运动称为受干扰的运动，并称 $\|\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|$ 为扰动，称 $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|$为初始扰动. 定义 1 的意思是只要初始扰动充分小，扰动就可以任意小，这时未受干扰运动是稳定的.

定义 2 对(1)的特解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)(t\in[t_0,+\infty))$，若存在 $\varepsilon_0>0$，使对任意 $\delta>0$，总存在 $\boldsymbol{x}_0\in D$，满足(2)式，但解 $\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$在某一 $t=\bar{t}>t_0$ 处或无定义或(3)不成立，即

$$\|\boldsymbol{x}(\bar{t};\ t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\varphi}(\bar{t})\|\geqslant\varepsilon_0$$

则称解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是不稳定的.

定义 3 若(1)的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是稳定的，并存在 $\delta_0>0$，只要$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|<\delta_0$，都有

$$\lim_{t\to+\infty}(\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\varphi}(t))=0 \tag{4}$$

则称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是渐近稳定的.

题　　解

【516】 对提要中的方程组(1)，若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0})\equiv0$，则它有零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，试述零解的稳定及渐近稳定的定义.

解 若对任给 $\varepsilon>0$，恒存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使当$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta(\varepsilon)$

的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 都在 $t\geqslant t_0$ 有定义，并且当 $t\geqslant t_0$ 时，$\|\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon$，这时称零解 $\boldsymbol{x}\equiv\mathbf{0}$ 是稳定的.

若零解 $\boldsymbol{x}\equiv 0$ 是稳定的，并存在 $\delta_0>0$，只要 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta_0$，都有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)=0$，这时称零解 $\boldsymbol{x}\equiv\mathbf{0}$ 是渐近稳定的.

【517】　设方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 上存在，试证明当 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 上稳定时，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上也是稳定的.

证　设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 上是稳定的，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$（取 $\delta_1<\varepsilon$），使 $\|\boldsymbol{\varphi}(t_0)-\boldsymbol{x}_0\|<\delta_1$ 时有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $t\geqslant t_0$ 上有定义且当 $t\geqslant t_0$ 时

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon \tag{1}$$

将解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 左延展至 $t=0$，由解对初值的连续依赖性知，取 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}(0;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$，对于给定的 δ_1，存在 $\delta>0$，使当 $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\varphi}(0)\|<\delta$ 时有

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{x}(t;\ 0,\boldsymbol{x}_1)\|<\delta_1,\quad 0<t\leqslant t_0 \tag{2}$$

注意到 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}(0;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$，由解的惟一性知 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ 0,\boldsymbol{x}_1)$ 与 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 上表示同一个解，$\boldsymbol{x}(t;\ 0,\boldsymbol{x}_1)$ 在 $t\geqslant 0$ 上有定义，且由(1)和(2)知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\varphi}(0)\|<\delta$ 时有 $t\geqslant 0$，$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{x}(t;\ 0,\boldsymbol{x}_1)\|<\varepsilon$，所以解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上也是稳定的.

【518】　试述高阶方程 $x^{(n)}=f(t,x,x',x'',\cdots,x^{(n-1)})$ 的解的稳定性定义.

解　设 $\boldsymbol{\xi}_0=(x_0,x_0',\cdots,x_0^{(n-1)})$

$$\boldsymbol{\xi}_1=(x_1,x_1',\cdots,x_1^{(n-1)})$$

$x=\varphi(t,x_0,x_0',\cdots,x_0^{(n-1)})$ 是高阶方程 $x^{(n)}=f(t,x,x',\cdots,$

$x^{(n-1)}$)的满足初始条件 $x^{(i)}\Big|_{t_0}=x_0^{(i)}$，$i=0,1,\cdots,n-1$ 的解，此解在区间 $t\geqslant t_0$ 上有定义，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当

$$\|\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_0\|=\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(x_1^{(i)}-x_0^{(i)})^2}<\delta$$

时，高阶方程以 $x^{(i)}\Big|_{t=t_0}=x_1^{(i)}$，$i=0,1,\cdots,n-1$ 为初始条件的解 $x=x(t;\ t_0,\boldsymbol{\xi}_1)$在区间 $t\geqslant t_0$ 上是存在的，并且当 $t\geqslant t_0$ 时满足不等式

$$\|\varphi(t)-x(t;\ t_0,\boldsymbol{\xi}_1)\|<\varepsilon,$$

则称高阶方程的解 $x=\varphi(t)$是稳定的.

【519】 设二维定常系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y)$$

有零解 $x=0$，$y=0$，这时 $O(0,0)$为系统的奇点，试分别对 O 为稳定和不稳定结点、焦点及鞍点、中心的不同情形，讨论零解按李雅普诺夫意义下的稳定性.

解 当 O 是稳定结点时，零解是渐近稳定的；当 O 是不稳定结点时，零解是不稳定的；当 O 是稳定焦点时，零解是渐近稳定的；当 O 是不稳定焦点时，零解是不稳定的；当 O 是鞍点时，零解是不稳定的；当 O 是中心时，零解是稳定但不渐近稳定的.

【520】 讨论方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x$$

的解 $x=0$，$y=C$(C 是任意常数)的稳定性.

解 为考虑解 $x=0$，$y=C$ 的稳定性，先求出方程组满足

初始条件 $x(0)=x_0$，$y(0)=y_0$，的解

$$x=x_0e^t,\qquad y=y_0+x_0(e^t-1)$$

取 $\varepsilon_0=1$，则对任意的 $\delta>0$，当初始扰动 $\sqrt{x_0^2+(y_0-C)^2}<\delta$，$x_0\neq 0$，$t\geqslant \ln\frac{2}{|x_0|}$，$|x_0|e^t>2$ 时扰动

$$\sqrt{(x_0e^t)^2+[y_0+x_0(e^t-1)-C]^2}$$

$$=\sqrt{2|x_0|e^t(|x_0|e^t-1)+(y_0-C)^2+x_0^2}>2>1=\varepsilon_0$$

所以解 $x=0$，$y=C$ 是不稳定的.

【521】 讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=0,\qquad \frac{dy}{dt}=\lambda y\quad(\lambda\text{ 为参数})$$

的解 $x=C$，$y=0$（C 为任意常数）的稳定性.

解　为考虑解 $x=C$，$y=0$ 的稳定性，先求出方程组满足初始条件 $x(0)=\xi$，$y(0)=\eta$ 的解

$$x=\xi,\qquad y=\eta e^{\lambda t}$$

当 $\lambda<0$ 时，对任意常数 C，解 $x=C$，$y=0$ 为稳定的，这是因为对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当初始扰动 $\sqrt{(\xi-C)^2+\eta^2}<\delta$ 时，扰动

$$\sqrt{(\xi-C_0)^2+(\eta e^{\lambda t}-0)^2}\leqslant\sqrt{(\xi-C_0)^2+\eta^2}<\delta=\varepsilon.$$

当 $\lambda>0$ 时，解 $x=C$，$y=0$ 为不稳定的. 这是因为取 $\varepsilon_0=1$，任给 $\delta>0$，使

$$\sqrt{(\xi-C_0)^2+\eta^2}<\delta,$$

及 $\eta\neq 0$，当 $\bar{t}=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{2}{|\eta|}$ 时，

$$(x-C_0)^2+(\eta e^{\lambda t}-0)^2\geqslant\eta^2e^{2\lambda\bar{t}}=4>\varepsilon_0^2$$

当 $\lambda=0$ 时，方程组只有常数解 $x=C_1$，$y=C_2$，显然它们都是稳定的.

【522】 对于方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-xy,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y^2+x^4$$

1）求出它的所有轨线；

2）求出它的全部解，并确定它们存在的区间；

3）讨论零解 $x=0$，$y=0$ 的稳定性.

解 1）原方程组可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-y^2+x^4}{-xy}$$

令 $z=y^2$，可化为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{x}z-2x^3$$

易求得通解为

$$y^2=C_1x^2-x^4\qquad (C_1\geqslant 0)$$

这就是原方程组的轨线族.

2）当 $y=\pm\sqrt{C_1x^2-x^4}$，代入方程组第一式得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mp x\sqrt{C_1x^2-x^4}$$

这是变量分离方程

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{C_1-x^2}}=\pm\int\mathrm{d}t$$

两边积分得

$$x=\pm\frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{C_1(C_2\pm t)^2+1}}$$

那么

$$y=\pm\frac{C_1^2(C_2\pm t)}{C_1^2(C_2\pm t)^2+1}$$

于是原方程组的通解为

$$\begin{cases}x=\pm\dfrac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{C_1(C_2\pm t)^2+1}}\\ y=\pm\dfrac{C_1^2(C_2\pm t)}{C_1^2(C_2\pm t)^2+1}\end{cases}\tag{1}$$

其中 $C_1>0$，C_2 为任意常数，它们的存在区间都是 $(-\infty,+\infty)$.

3) 由(1)知，当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to0$、$y(t)\to0$. 由此易知零解 $x=0$，$y=0$ 是渐近稳定的.

【523】 设 $g(t)$，$f(t)$ 在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 上连续，试证方程

$$\frac{dx}{dt}=g(t)x+f(t)\tag{1}$$

的任一解

1) 当 $\int_0^{+\infty}g(t)dt<+\infty$ 时是稳定的；

2) 当 $\int_0^{+\infty}g(t)dt=-\infty$ 时是渐近稳定的；

3) 当 $\int_0^{+\infty}g(t)dt=+\infty$ 时是不稳定的.

证 设 $x=x_1(t)$ 是(1)的任一解，即有

$$\frac{dx_1}{dt}=g(t)x_1+f(t).$$

又设 $x_2(t)$ 是(1)的另一解，即有

$$\frac{dx_2}{dt}=g(t)x_2+f(t)$$

因此，它们的差 $y(t)=x_2(t)-x_1(t)$满足齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(t)y \tag{2}$$

所以，问题归结为齐次方程(2)的零解的稳定性问题. 方程(2)满足初始条件 $y(0)=y_0$ 的解为

$$y=y_0e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s} \tag{3}$$

1) 当$\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t<+\infty$时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$存在，由 $g(t)$ 在$[0,+\infty)$连续知当 $t\in[0,+\infty)$时，$\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$是有界的. 设它的界为 M，即当 $t\in[0,+\infty)$时，$\left|\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant M$. 对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon e^{-M}$，则当$|y_0|<\delta$时，$t\in[0,+\infty)$，

$$|y(t)|\leqslant|y_0|e^M<\varepsilon$$

所以方程(2)的零解是稳定的，即原方程(1)的任一解稳定.

2) 当$\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t=-\infty$时，$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}=0$，因而当 $t\in[0,+\infty)$时，$e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}$是有界的，即存在 $M>0$，$t\in[0,+\infty)$时，有$\left|e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}\right|<M$. 对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，则当$|y_0|<\delta$时，$t\in[0,\infty)$，就有$|y(t)|<\varepsilon$，且$\lim\limits_{t\to+\infty}y_0e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}=0$，所以方程(2)的零解是渐近稳定的，即原方程(1)的任一解渐近稳定.

3) 当$\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t=+\infty$时，对任意$|y_0|\neq0$，必存在 t_1，使$e^{\int_0^{t_1}g(s)\mathrm{d}s}>\frac{2}{|y_0|}$，因而取 $\varepsilon_0=1$，对任意的 $\delta>0$，存在 $y_0\neq0$，$|y_0|<\delta$，$t=t_1$时，

$$|y(t_1)| = |y_0 e^{\int_0^{t_1} g(s)ds}| \geqslant 2 > 1 = \varepsilon_0$$

所以(2)的零解是不稳定的，因而(1)的任一解都不稳定.

【524】 设 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$在区间 $0 \leqslant t < +\infty$上连续，$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$是方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a^2(t)y + b(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a^2(t)x + c(t) \end{cases} \tag{1}$$

的解，试证这个解是稳定的.

证 设 $x=x_1(t)$，$y=y_1(t)$是方程组(1)的任一解，则

$$x = x_1 - \varphi, \qquad y = y_1 - \psi$$

是齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = -a^2(t)y, \qquad \frac{dy}{dt} = a^2(t)x \tag{2}$$

的解，从而将方程组(1)的解 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$的稳定性转化为方程组(2)的零解的稳定性.

由(2)得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

易求出它的通解

$$x^2 + y^2 = C_1^2$$

或

$$y = \pm\sqrt{C_1^2 - x^2} \tag{3}$$

于是

$$\frac{dx}{dt} = \mp a^2(t)\sqrt{C_1^2 - x^2}$$

两边积分得

$$x = C_1\cos\left(\int_0^t a^2(s)\mathrm{d}s + C_2\right)$$

代入(3)式得

$$y = C_1\sin\left(\int_0^t a^2(s)\mathrm{d}s + C_2\right)$$

即方程组(2)的通解为

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos\left(\int_0^t a^2(s)\mathrm{d}s + C_2\right) \\ y(t) = C_1\sin\left(\int_0^t a^2(s)\mathrm{d}s + C_2\right) \end{cases}$$

将初始条件 $x(0)=x_0$，$y(0)=y_0$ 代入得

$$C_1 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \qquad C_2 = \arctan\frac{y_0}{x_0}$$

对任给的 $\varepsilon>0$，取 $0<\delta<\varepsilon$，当 $\sqrt{x_0^2+y_0^2}<\delta$ 时，$t\in[0,+\infty)$

$$\sqrt{x^2(t)+y^2(t)} = \sqrt{x_0^2+y_0^2} < \delta < \varepsilon$$

所以齐次方程(2)的零解是稳定的，因而方程组(1)的解 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$稳定.

【525】 如果 n 维齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{x} \qquad (A(t)\text{是 } n\times n \text{ 矩阵函数})$$

的每一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$当 $t\to+\infty$时，都趋于零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，试证它的每一个解是渐近稳定的.

证 任一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$是连续的，且 $t\to+\infty$时 $\boldsymbol{x}(t)\to\boldsymbol{0}$.

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$是方程组的另一解，因为

$$\lim_{t\to+\infty}(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)) = \lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t) - \lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{y}(t) = 0 \qquad (1)$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $t_0>0$，当 $t\geqslant t_0$ 时

$$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|<\varepsilon$$

再由解对初值的连续依赖性知，存在 $\delta>0$，当 $|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{y}(0)|<\delta$ 时，$0\leqslant t\leqslant t_0$

$$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|<\varepsilon$$

从而知道解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$是稳定的，再由(1)知它也是渐近稳定的.

【526】　求证$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{1+t}+x^2$ 的一次近似方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{1+t}$的零解是渐近稳定的，而原方程的零解是不稳定的.

证　先证一次近似方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{1+t} \tag{1}$$

的零解是渐近稳定的. 易求出它的通解为

$$x=\frac{C}{1+t}$$

满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解为 $x=\frac{x_0}{1+t}$. 对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当$|x_0|<\delta$ 时，$t>0$，有

$$|x|=\left|\frac{x_0}{1+t}\right|<|x_0|<\varepsilon$$

且

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x_0}{1+t}=0.$$

所以一次近似方程(1)的零解是渐近稳定的.

再证明原方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{1+t}+x^2$$

的零解是不稳定的. 因为它是伯努利方程，易得它的通解

$$x=\frac{1}{(1+t)(C-\ln(1+t))},$$

方程满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解为

$$x(t;0,x_0)=\frac{1}{(1+t)\left(\frac{1}{x_0}-\ln(1+t)\right)}$$

对 $|x_0|<\delta$, 当 $\ln(1+t)=\frac{1}{x_0}$, 即当 $\bar{t}=e^{\frac{1}{x_0}}-1$ 时, 解 $x(\bar{t};0,x_0)$无意义, 所以原方程的零解是不稳定的.

§6.5 李雅普诺夫第二方法

提　　要

李雅普诺夫第二方法(也称 V 函数法), 是近代研究稳定性问题的基本方法. 这个方法的特点是, 不必求出方程组的解, 而借助于构造一个具有特殊性质的函数(称为李雅普诺夫函数或 V 函数), 结合方程组本身来讨论稳定性. 本节只就自治系统零解稳定性问题来介绍这个方法和选题.

考虑自治系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\qquad (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=0) \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ f_n(x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix}$$

以下总假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在某区域 D: $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant A$ $(A>0)$(即 $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\leqslant A)$ 内具有连续一阶偏导数.

定义 1　设函数 $V(\boldsymbol{x})=V(x_1,\cdots,x_n)$ 在域 D_1: $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 上具有连续偏导数，且 $V(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$

1) 若在 D_1 上，$V(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$,则称 $V(\boldsymbol{x})$ 为常正(常负)函数，常正、常负函数统称为常号函数;

2) 若在 $D_1\setminus\{0\}$: $0<\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 上，$V(\boldsymbol{x})>0$ (<0) 则称 $V(\boldsymbol{x})$ 为正定(负定)函数，正定、负定函数统称为定号函数;

3) 若 $V(\boldsymbol{x})$ 在原点 $O(0,\cdots,0)$ 的任一邻域内既可取正值又可取到负值，则称 $V(\boldsymbol{x})$ 为变号函数.

定义 2　设函数 $V(\boldsymbol{x})$ 在原点 O 的邻域内连续可微，把函数

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{2}$$

称为 $V(\boldsymbol{x})$ 关于系统(1)的对时间 t 的全导数，记为 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.

定理 1(稳定性定理)　如果在某个 D 上存在正(负)定函数 $V(\boldsymbol{x})$，且它关于系统(1)的对时间 t 的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 在 D 上为常负(正)函数，则系统(1)的零解是稳定的.

定理 2(渐近稳定性定理)　如果在原点的某个邻域 D 上存在正(负)定函数 $V(\boldsymbol{x})$，它关于系统(1)的对 t 的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 在 D 上为负(正)定函数，则系统(1)的零解为渐近稳定的.

定理 3(不稳定性定理)　如果存在函数 $V(\boldsymbol{x})$，$V(\boldsymbol{0})=0$，它关于系统(1)的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 在区域 D 上是正(负)定的，但在原点的任一邻域内至少有一点 $\boldsymbol{x}_0$，使 $V(\boldsymbol{x}_0)>0$ (<0)，则系统(1)的零解是不稳定的.

题　解

【527】 试判别下列函数的定号性:

1) $V(x_1,x_2)=-x_1^2$;

2) $V(x_1,x_2)=x_1^2x_2^2$;

3) $V(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2^2+x_1^4+x_2^4$;

4) $V(x_1,x_2)=x_1+2x_2+x_2^2$;

5) $V(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_1^2x_2^2$;

6) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_3^2$;

7) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-x_3^3$.

解 1) $V(x_1,x_2)\leqslant 0$, $V(x_1,x_2)$是常负的;

2) $V(x_1,x_2)$是常正的;

3) $V(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2+x_2^2$, $V(x_1,x_2)$是正定的;

4) $V(x_1,x_2)$是变号的. 例如:取 $x_2=0$, $x_1>0$, $V(x_1,x_2)=x_1>0$, 而取 $x_1=0$, $x_2=\dfrac{-1}{n}$ $(n\in N)$, $V(x_1,x_2)<0$;

5) $V(x_1,x_2)$是正定的;

6) $V(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+x_3^2$ 是常正的;

7) 若 $x_3\neq 0$ 取 $H=1-\varepsilon(0<\varepsilon<1)$, 当$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}<H$时, $x_3^2-x_3^3>0$, 所以 $V(x_1,x_2,x_3)$是正定的.

【528】 对于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1x_2^4,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_1^4x_2\end{cases}$$

试说明 $V(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4$ 是正定的, 而$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是常负的.

解　$V(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4$，$V(0,0)=0$，而当 $x_1^2+x_2^2\neq 0$ 时，$V(x_1,x_2)>0$，所以 $V(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4$ 是正定的.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{\partial V(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial V(x_1,x_2)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}\\&=4x_1^3\cdot(-x_1x_2^4)+4x_2^3\cdot x_1^4x_2\\&=0\end{aligned}$$

因而$\frac{dV}{dt}$是常负的.

【529】　讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x+y,\qquad \frac{dy}{dt}=-x+\alpha y$$

的零解的稳定性.

解　选取正定函数 $V(x,y)=x^2+y^2$，$\frac{dV}{dt}=2x(\alpha x+y)+2y(-x+\alpha y)=2\alpha(x^2+y^2)$.

1）当 $\alpha<0$ 时，$\frac{dV}{dt}$负定，由定理 2 知零解是渐近稳定的；

2）当 $\alpha=0$ 时，$\frac{dV}{dt}=0$ 零解是稳定的；

3）当 $\alpha>0$ 时，$\frac{dV}{dt}$正定，零解是不稳定的.

【530】　确定方程组

$$\frac{dx}{dt}=my,\qquad \frac{dy}{dt}=-mx \tag{1}$$

的奇点及类型，并找出方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=my+\alpha x(x^2+y^2),\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-mx+\alpha y(x^2+y^2)\end{cases} \tag{2}$$

的李雅普诺夫函数，从而讨论(2)的零解的稳定性.

解 (1)的奇点为 $O(0,0)$. 它的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & m \\ -m & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + m^2 = 0$$

得特征根 $\lambda_{1,2} = \pm |m| i$，因而(1)的奇点 O 为中心.

取正定函数 $V(x,y)=x^2+y^2$，V 关于系统(2)对 t 的全导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= 2x[my+\alpha x(x^2+y^2)]+2y[-mx+\alpha y(x^2+y^2)] \\ &= 2\alpha(x^2+y^2)^2\end{aligned}$$

若 $\alpha>0$，则$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}>0$，因而(2)的零解不稳定；

若 $\alpha=0$，则$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$，因而(2)的零解稳定；

若 $\alpha<0$，则$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$，因而(2)的零解渐近稳定.

【531】 讨论方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y+x^3, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x+y^3$$

的零解的稳定性.

解 取正定函数 $V(x,y)=x^2+y^2$，则 V 关于方程组对 t 的全导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= 2x(-y+x^3)+2y(x+y^3) \\ &= 2(x^4+y^4)\geqslant 0,\end{aligned}$$

当 $x_0^2+y_0^2\neq 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}V(x_0,y_0)}{\mathrm{d}t}>0$，所以零解是不稳定的.

【532】 讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y+(x-y)(x^2+y^2),\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+(x-y)(x^2+y^2)\end{cases}$$

的零解的稳定性.

解　取正定函数 $V(x,y)=x^2+y^2$，则 V 关于方程组对 t 的全导数

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=2x[-x-y+(x-y)(x^2+y^2)]\\&\quad+2y[x-y+(x-y)(x^2+y^2)]\\&=2(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)\end{aligned}$$

取 $H=1-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1)$，在域 $0<x^2+y^2<H$ 内，$\dfrac{dV}{dt}<0$，所以零解是渐近稳定的.

【533】　讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{y}{2}+(x-1)[(x-1)^2+y^2]\\ \dfrac{dy}{dt}=-2+2x+y[(x-1)^2+y^2]\end{cases}\tag{1}$$

的解 $x=1$，$y=0$ 的稳定性.

解　令 $x=x_1+1$，$y=y_1$ 得

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{1}{2}y_1+x_1(x_1^2+y_1^2)\\ \dfrac{dy_1}{dt}=2x_1+y_1(x_1^2+y_1^2)\end{cases}\tag{2}$$

(2)有零解 $x_1=0$，$y_1=0$.

取函数 $V(x_1,y_1)=4x_1^2+y_1^2$ 是正定的. 则 V 关于(2)对 t 的全导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=8x_1\left[-\frac{1}{2}y_1+x_1(x_1^2+y_1^2)\right]+2y_1\left[2x_1+y_1(x_1^2+y_1^2)\right]$$
$$=(x_1^2+y_1^2)(8x_1^2+2y_1^2)$$

也是正定的，所以(2)的零解是不稳定的，从而知原方程组(1)的解 $x=1$，$y=0$ 是不稳定的.

【534】 假设常系数线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy$$

和系数矩阵的特征值都具有负的实部，试找一个二次型 $V(x,y)$使其按方程组对 t 的全导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-(x^2+y^2)$$

并从 V 的性质讨论方程组的零解的稳定性.

解 设 $V(x,y)=\frac{1}{2}Ax^2+Bxy+\frac{1}{2}Cy^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=(Ax+By)(ax+by)+(Bx+Cy)(cx+dy)$$
$$=(aA+Bc)x^2+(bA+aB+Bd+Cc)xy$$
$$+(bB+dC)y^2$$
$$=-(x^2+y^2)$$

由此得代数方程组

$$\begin{cases}aA+Bc=-1\\ bA+(a+d)B+Cc=0\\ bB+dC=-1\end{cases}$$

解得

$$A=\frac{-[(ad-bc)+(c^2+d^2)]}{(a+d)(ad-bc)}$$

$$B=\frac{ac+bd}{(a+d)(ad-bc)}$$

$$C=-\frac{(ad-bc)+(a^2+b^2)}{(a+d)(ad-bc)}$$

所以

$$AC-B^2=\frac{(a+d)^2+(b-c)^2}{(a+d)^2(ad-bc)}$$

由于原方程组的特征方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

的根都具有负的实部，即有

$$a+d<0,\qquad ad-bc>0,$$

于是 $\Delta=(a+d)(ad-bc)<0$，因而 $A>0$，$AC-B^2>0$

因而二次型 $V(x,y)=\frac{1}{2}Ax^2+Bxy+\frac{1}{2}Cy^2$ 是正定的，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 则是负定的，所以方程组的零解是渐近稳定的.

【535】 试用李雅普诺夫第二方法讨论下列方程组零解的稳定性：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sin(x+y),\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\ln(1+y)$$

解　原方程组在(0,0)点展开得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y+X_3\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y+Y_2\end{cases}$$

其中 $X_3=-\frac{1}{3!}(x+y)^3+\frac{1}{5!}(x+y)^5+\cdots$,

$$Y_2=\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+\cdots$$

取 $V(x,y)=x^2-y^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2x(x+y+X_3)-2y(-y+Y_2)$$
$$=2x^2+2y^2+2xy+2xX_3-2yY_2$$

因为

$$\lim_{r^2\to 0}\frac{2x\cdot X_3}{x^2+y^2}=\lim_{r^2\to 0}\frac{2x[\sin(x+y)-(x+y)]}{x^2+y^2}=0$$
$$\lim_{r^2\to 0}\frac{-2yY_2}{x^2+y^2}=\lim_{r^2\to 0}\frac{-2y[\ln(1+y)-y]}{x^2+y^2}=0$$

其中 $r^2 \triangleq x^2+y^2$. 当 r 充分小时，

$$|2xX_3|<\frac{1}{4}(x^2+y^2),$$

$$|-2yY_2|<\frac{1}{4}(x^2+y^2),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}>(x+y)^2+x^2+y^2-\frac{1}{4}(x^2+y^2)-\frac{1}{4}(x^2+y^2)$$
$$=(x+y)^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

由此知$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是正定函数，而 V 是变号函数，所以方程组的零解是不稳定的.

【536】 讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-3x-x(y-2z)^2\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x+3z-y(x+z)^2\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2x-y-z\end{cases}$$

的零解的稳定性.(提示:取 $V(x,y,z)=2x^2+y^2+3z^2$)

解 $V=2x^2+y^2+3z^2$ 是正定的，而

$$\frac{dV}{dt}=4x[y-3x-x(y-2z)^2]+2y[-2x+3z-y(x+z)^2]$$
$$+6z(2x-y-z)$$
$$=-2[2x^2(y-2z)^2+y^2(x+z)^2+3z^2]\leqslant 0$$

$\frac{dV}{dt}$是常负的，所以零解是稳定的.

【537】 讨论方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=3x+y-z+3x(6x^2+5y^2+2z^2)\\ \dot{y}=-2x-5y+z+5y(6x^2+5y^2+2z^2)\\ \dot{z}=2x-y-2z+2z(6x^2+5y^2+2z^2)\end{cases}$$

的零解的稳定性.(提示:取 $V(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2$)

解　$V=2x^2+y^2+z^2$ 是正定的，而

$$\frac{dV}{dt}=4x[-3x+y-z+3x(6x^2+5y^2+2z^2)]$$
$$+2y[-2x-5y+z+5y(6x^2+5y^2+2z^2)]$$
$$+2z[2x-y-2z+2z(6x^2+5y^2+2z^2)]$$
$$=2(6x^2+5y^2+2z^2)(6x^2+5y^2+2z^2-1)$$

因为在域 $0<6x^2+5y^2+2z^2<1$ 内部，$6x^2+5y^2+2z^2-1<0$

于是$\frac{dV}{dt}$是负定的，所以零解是渐近稳定的.

【538】 设 $m(m\geqslant 2)$次型 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定的，它关于常系数线性齐次方程组

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}x_l\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{1}$$

对 t 的全导数是负定的，试证明方程组

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}x_l+X_k(x_1,\cdots,x_n)\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{2}$$

的零解是渐近稳定的，其中$|X_k| = o(\|\boldsymbol{x}\|^2)$.

证 函数 $V(\boldsymbol{x})$关于方程组(1)对 t 的全导数为

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_k}\cdot\sum_{l=1}^{n}a_{kl}x_l \tag{3}$$

由题设知 $U(\boldsymbol{x})$是负定的.

函数 $V(\boldsymbol{x})$关于方程组(2)对的全导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(2)} = U(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_k}X_k \tag{4}$$

又因为 $V(\boldsymbol{x})$是 m 次型，$\frac{\partial V}{\partial x_k}$是 $m-1$ 次型，由$\frac{\partial V}{\partial x_k}$在含原点的圆域上的连续性，存在 $A_k>0$，使得在该圆域上有

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_k}\right| \leqslant A_k\|\boldsymbol{x}\|^{m-1},\quad k=1,2,\cdots,n$$

再由题设知，存在 $B_k>0$，使

$$|X_k| \leqslant B_k\|\boldsymbol{x}\|^2,\quad k=1,2,\cdots,n$$

若令 $W = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_k}X_k$，则得在该圆域上

$$\|\boldsymbol{W}\| \leqslant \sum_{k=1}^{n}A_kB_k\|\boldsymbol{x}\|^{m+1} = A\|\boldsymbol{x}\|^{m+1} \tag{5}$$

其中 $A = \sum_{k=1}^{n}A_kB_k>0$. 由(3)式知 $U(\boldsymbol{x})$是负定的 m 次型，由(5)式知，在原点的充分小的邻域内，$U(x)+W(x)$也是负定的，即$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2)}$是负定的. 所以方程组(2)的零解是渐近稳定的.

【539】 设 $V(x_1,x_2,\cdots x_n)$是 m 次齐次函数，并且是变号的，而函数 $W(x_1,x_2,\cdots,x_n)$适合关系式$\|W\| = o(\|\boldsymbol{x}\|^m)$，试证 $U(x_1,x_2,\cdots,x_n) = V(x_1,x_2,\cdots,x_n) + W(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也是变号的.

证　因为 $V(x_1,\cdots,x_n)$是变号函数，所以在零点的任一邻域内，V 既可以取到正值，又可以取到负值. 设 $\|\boldsymbol{x}^0\|=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^0)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant 1$，$\|\bar{\boldsymbol{x}}^0\|=\left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i^0)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant 1$，

$$V(x_1^0,\cdots,x_n^0)=\alpha>0$$

$$V(\bar{x}_1^0,\cdots,\bar{x}_n^0)=\beta<0$$

因为 V 是 m 次齐次多项式，所以

$$V(tx_1^0,\cdots,tx_n^0)=t^m\alpha$$

而

$$W(tx_1^0,\cdots,tx_n^0)=o(t^m\|\boldsymbol{x}^0\|^m)$$

因此，当 t 充分小时，$|W(tx_1^0,\cdots,tx_n^0)|\leqslant\alpha_1 t^m\|\boldsymbol{x}^0\|^m\leqslant\alpha_1 t^m$，其中 $0<\alpha_1<\alpha$. 所以

$$\begin{aligned}U(tx_1^0,\cdots,tx_n^0)&=V(tx_1^0,\cdots,tx_n^0)+W(tx_1^0,\cdots,tx_n^0)\\&\geqslant t^m\alpha-\alpha_1 t^m>0\end{aligned}$$

即 U 在点 $x_1=tx_1^0$，$x_2=tx_2^0,\cdots,x_n=tx_n^0$ 处取到正值. 同理，$V(t\bar{x}_1^0,\cdots,t\bar{x}_n^0)=t^m\beta$，当 t 充分小时

$$|W(t\bar{x}_1^0,\cdots,t\bar{x}_n^0)|\leqslant\beta_1$$

其中 $0<\beta<|\beta|$，所以

$$\begin{aligned}U(t\bar{x}_1^0,\cdots,t\bar{x}_n^0)&=V(t\bar{x}_1^0,\cdots,t\bar{x}_n^0)+W(t\bar{x}_1^0,\cdots,t\bar{x}_n^0)\\&\leqslant\beta t^m+\beta_1 t^m<0\end{aligned}$$

即 U 在点 $x_i=t\bar{x}_i^0$，$i=1,\cdots,n$ 处取到负值. 由于在 V 的零点的任一邻域中，U 既可取到正值，又可取到负值，因而 U 也是变号函数.

第七章　一阶偏微分方程

§7.1　首次积分

提　要

定义 1　对一般的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1,\cdots,y_n)\quad(i=1,\cdots,n)\tag{1}$$

其中右端函数 $f_1,\cdots,f_n$ 都在某个区域 $D\subset R^{n+1}$ 内连续. 设 $\Phi=\Phi(x,y_1,\cdots,y_n)$ 在 D 内连续可微, 并且不是常数, 如果以方程组(1)的任一解代入 Φ 之后, 函数 $\Phi(x,y_1(x),\cdots,y_n(x))$ 等于与 x 无关的常数, 则称表达式

$$\Phi(x,y_1,\cdots,y_n)=C$$

为方程组(1)的一个首次积分, 其中 C 是任意常数. 有时也简称 $\Phi(x,y_1,\cdots,y_n)$ 为首次积分.

定义 2　设 $\Phi_i(x,y_1,\cdots,y_n)(i=1,\cdots,k,\ k\leqslant n)$ 是微分方程组(1)的 k 个首次积分, 如果矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

中某个 k 阶子阵的行列式不为 0，则称 $\Phi_i(x, y_1, \cdots, y_n)(i = 1,2,\cdots,k)$是(1)的 k 个独立的首次积分.

定理 1　设已知微分方程组(1)的 n 个独立的首次积分

$$\Phi_i(x, y_1, \cdots, y_n) = C_i, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

则它们构成方程组(1)的通积分(隐式通解). 若由它们可解得含 n 个任意常数的函数组

$$y_1 = \varphi_1(x;\ C_1, \cdots, C_n)$$

$$\cdots$$

$$y_n = \varphi_n(x;\ C_1, \cdots, C_n)$$

则该函数组就是微分方程组(1)的通解.

微分方程组(1)有时写成对称形式

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{f_1} = \frac{\mathrm{d}y_2}{f_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}y_n}{f_n} = \frac{\mathrm{d}x}{1}$$

这样做的好处是自变量和因变量处于平等的地位，便于求首次积分.

定理 2　设函数 $\Phi(x, y_1, \cdots, y_n)$在 D 内连续可微，并且不是常数，则

$$\Phi(x, y_1, \cdots, y_n) = C$$

是微分方程组(1)的首次积分的充要条件为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}f_1+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}f_n=0$$

在 D 内是关于 $x,y_1,\cdots,y_n$ 的一个恒等式.

题 解

利用首次积分法求下列方程组的通积分(习题 540~习题 548)

【540】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x\end{cases}$

解 先将第一式两端同乘 x，第二式两端同乘 y，然后相加，得到

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$$

两边积分，得到该方程组的一个首次积分

$$x^2+y^2=C_1 \tag{1}$$

其中 C_1 为任意常数.

将第一式两端乘 y，第二式两端乘 x，然后相减得

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=x^2+y^2$$

即

$$\frac{y\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dy}{dt}}{x^2+y^2}=1$$

或

$$\frac{d}{dt}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)=1$$

则得另一个首次积分

$$\arctan\frac{x}{y}-t=C_2 \tag{2}$$

其中 C_2 为任意常数.

因为当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \dfrac{y}{y^2+x^2} & \dfrac{-x}{y^2+x^2} \end{vmatrix}\neq 0$$

故(1)，(2)两个首次积分在 $x^2+y^2\neq 0$ 时是互相独立的，于是得方程组的通积分为

$$\begin{cases} x^2+y^2=C_1 \\ \arctan\dfrac{x}{y}-t=C_2 \end{cases}$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

【541】 $\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dy}{\sqrt{z-x-y}+1}=\dfrac{dz}{2}$

解　首先，我们有

$$\frac{dx}{1}=\frac{dz}{2}$$

即

$$2dx=dz$$

两边积分后得该方程组的一个首次积分

$$2x-z=C_1$$

其次，由合比定理有

$$\frac{dz-dx-dy}{-\sqrt{z-x-y}}=\frac{dx}{1}$$

两边积分后得另一个首次积分

$$x+2\sqrt{z-x-y}=C_2$$

容易验证这两个首次积分是相互独立的，于是得微分方程组的通积分为

$$\begin{cases}2x-z=C_1\\ x+2\sqrt{z-x-y}=C_2.\end{cases}$$

【542】 $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dz}{2xz}$

解 由后一等式有

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

两边积分，从而得到该方程组的一个首次积分

$$\frac{y}{z}=C_1$$

再利用合比定理，有

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{2xy}$$

或

$$\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{y}$$

两边积分后得

$$\ln(x^2+y^2+z^2)=\ln|C_2y|$$

又得到另一个首次积分

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2$$

易证两个首次积分是相互独立的，于是原方程组的通积分为

$$\begin{cases} \dfrac{y}{z} = C_1 \\ \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2. \end{cases}$$

【543】 $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{xy}$

解　首先，我们有

$$\frac{y dx}{xyz} = \frac{x dy}{xyz} = \frac{z dz}{xyz}$$

由合比定理得

$$y dx + x dy = 2z dz$$

两边积分得方程组的一个首次积分

$$xy - z^2 = C_1$$

又以方程组第一个等式可得另一个首次积分

$$\frac{x}{y} = C_2$$

并且它与前一首次积分是相互独立的，因此得原方程组的通积分为

$$\begin{cases} xy - z^2 = C_1 \\ \dfrac{x}{y} = C_2. \end{cases}$$

【544】 $\dfrac{A dx}{(B-C)yz} = \dfrac{B dy}{(C-A)zx} = \dfrac{C dz}{(A-B)yx}$，

其中 A，B，C 为常数.

解　由第一个等式可得

$$\frac{\frac{A}{B-C} x dx}{xyz} = \frac{\frac{B}{C-A} y dy}{xyz}$$

即

$$\frac{A}{B-C}x\mathrm{d}x-\frac{B}{C-A}y\mathrm{d}y=0$$

两边积分得方程组的一个首次积分

$$\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2=C_1$$

由第二个等式可得

$$\frac{\frac{B}{C-A}y\mathrm{d}y}{xyz}=\frac{\frac{C}{A-B}z\mathrm{d}z}{xyz}$$

即

$$\frac{B}{C-A}y\mathrm{d}y-\frac{C}{A-B}z\mathrm{d}z=0$$

两边积分得方程组的另一个首次积分

$$\frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2=C_2$$

并且它与前一个首次积分是相互独立的，于是原方程组的通积分为

$$\begin{cases}\dfrac{A}{B-C}x^2-\dfrac{B}{C-A}y^2=C_1\\[2mm] \dfrac{B}{C-A}y^2-\dfrac{C}{A-B}z^2=C_2.\end{cases}$$

【545】 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-x(x^2+y^2-1)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-y(x^2+y^2-1)\end{cases}$

解 由原方程组可得

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)$$

即

$$d(x^2+y^2)=-2(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)dt$$

这个微分方程关于变量 t 和 x^2+y^2 是可以分离的，因此易求得它的积分为

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}e^{2t}=C_1$$

它是原方程组的一个首次积分.

再次利用方程组，得到

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=-(x^2+y^2)$$

即

$$\frac{d}{dt}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=-1$$

由此得方程组另一首次积分

$$\arctan\frac{y}{x}+t=C_2$$

这两个首次积分是相互独立的. 采用极坐标，令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，这样由两个首次积分推得

$$\left(1-\frac{1}{r^2}\right)e^{2t}=C_1$$

$$\theta+t=C_2$$

由此解得

$$r=\frac{1}{\sqrt{1-C_1e^{-2t}}}$$

$$\theta=C_2-t$$

因此微分方程组的通解为

$$x=\frac{\cos(C_2-t)}{\sqrt{1-C_1e^{-2t}}},\qquad y=\frac{\sin(C_2-t)}{\sqrt{1-C_1e^{-2t}}}.$$

【546】 $$\begin{cases} \alpha \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (\beta - \gamma) vw \\ \beta \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (\gamma - \alpha) wu \\ \gamma \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = (\alpha - \beta) uv \end{cases}$$

其中 $\alpha<\beta<\gamma<0$ 是给定常数.

解 由原方程组得

$$\alpha u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \beta v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 0$$

从而得到一个首次积分

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = C_1$$

同样，我们有

$$\alpha^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \beta^2 v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma^2 w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 0$$

从而又得方程组另一首次积分

$$\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + \gamma^2 w^2 = C_2$$

有了这两个首次积分，可以将 u, v 用 w 来表示

$$u^2 = \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)}[C_2 - \beta C_1 + \gamma(\beta - \gamma) w^2]$$

$$v^2 = \frac{1}{\beta(\alpha - \beta)}[\alpha C_1 - C_2 - \gamma(\alpha - \gamma) w^2]$$

代入方程组第三式，得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \pm \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \sqrt{(a + Aw^2)(b - Bw^2)}$$

其中

$$a = \frac{C_2 - \beta C_1}{\alpha(\alpha - \beta)}, \qquad b = \frac{\alpha C_1 - C_2}{\beta(\alpha - \beta)}$$

$$A = \frac{\gamma(\beta - \gamma)}{\alpha(\alpha - \beta)} > 0, \qquad B = \frac{\gamma(\alpha - \gamma)}{\beta(\alpha - \beta)} > 0$$

于是由以上微分方程可解得

$$\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(a+Aw^2)(b-Bw^2)}}\mp\frac{\alpha-\beta}{\gamma}t=C_3$$

由此我们得到三个相互独立的首次积分，它们构成方程组的通积分.

【547】 $\begin{cases}(z-y)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\\(z-y)^2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y\end{cases}$

解　可把原方程组写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2}=\frac{\mathrm{d}y}{z}=\frac{\mathrm{d}z}{y}$$

由第二个等式得

$$y\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z=0$$

由此得方程组一个首次积分

$$y^2-z^2=C_1$$

再利用比例性质得

$$\frac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2}=\frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}z}{z-y}$$

即

$$\mathrm{d}x+(z-y)\mathrm{d}(z-y)=0$$

由此得方程组另一首次积分

$$2x+(z-y)^2=C_2$$

易验证两个首次积分是相互独立的，于是它们构成原方程组的通积分.

【548】 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{1}{z}\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{y-x}\end{cases}$

解 把原方程组写成

$$\begin{cases}dy-dx=-\dfrac{dx}{z}\\ \dfrac{dx}{y-x}=dz\end{cases}$$

把以上方程组中两个式子左右两边分别相乘，消去 dx 得

$$\frac{d(y-x)}{y-x}+\frac{dz}{z}=0$$

由此我们得到一个首次积分

$$(y-x)z=C_1$$

于是

$$y-x=\frac{C_1}{z}$$

代入原方程组第二式，得

$$dx=C_1\frac{dz}{z}$$

两边积分得

$$\ln|z|=\frac{x}{C_1}+\ln|C_2|$$

即

$$z=C_2e^{\frac{x}{C_1}}$$

将 $C_1=(y-x)z$ 代入，得另一个首次积分

$$ze^{-\frac{x}{z(y-x)}}=C_2$$

易验证两个首次积分是相互独立的，于是这两个首次积分构成方程组的通积分.

【549】 试证函数 $H(x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\cdots,y_n)=C$ 是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial H}{\partial y_i}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial H}{\partial x_i}\end{cases}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

的首次积分.

证 显然有

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

又

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\equiv 0$$

所以由定理 2

$$H(x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\cdots,y_n)=C$$

是所给方程组的首次积分. 证毕.

【550】 若已知方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=F_i(x,y_1,\cdots,y_n)(i=1,\cdots,n)\qquad(1)$$

的一个首次积分

$$v(x,y_1,\cdots,y_n)=C\qquad(2)$$

则可把含 n 个未知函数的一阶微分方程组(1)降低到一个含 $n-1$ 个未知函数的一阶微分方程组.

证 由首次积分定义推出

$$\frac{\partial v}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial v}{\partial y_n}$$

不能都恒等于 0，不妨设$\frac{\partial v}{\partial y_n}\neq 0$，因此可以由(2)解出

$$y_n=u(x,y_1,\cdots,y_{n-1};\ C) \tag{3}$$

即有

$$v(x,y_1,\cdots,y_{n-1},\ u(x,y_1,\cdots,y_{n-1};\ C))=C$$

由隐函数的微分公式，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial v}{\partial y_n},\qquad \frac{\partial u}{\partial y_i}=-\frac{\partial v}{\partial y_i}\Big/\frac{\partial v}{\partial y_n}$$

$$(i=1,\cdots,n-1) \tag{4}$$

将(3)代入(1)的前 $n-1$ 个等式，就消去了 y_n，从而得到一个含 $n-1$ 个未知函数的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=F_i(x,y_1,\cdots,y_{n-1},\ u(x,y_1,\cdots,y_{n-1};\ C))$$

$$(i=1,\cdots,n-1) \tag{5}$$

假设求得(5)的一个解为

$$y_1=\varphi_1(x),\cdots,y_{n-1}=\varphi_{n-1}(x)$$

下面证明函数组

$$\begin{cases} y_i=\varphi_i(x) \quad (i=1,2,\cdots,n-1) \\ y_n=u(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x);\ C) \end{cases} \tag{6}$$

是微分方程组(1)的解.

由于(5)成立，只要证明(6)满足方程组(1)的最后一等式. 由于

$$\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y_1}\varphi_1'(x)+\cdots+\frac{\partial u}{\partial y_{n-1}}\varphi_{n-1}'(x)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y_1}F_1+\cdots+\frac{\partial u}{\partial y_{n-1}}F_{n-1}$$

其中

$$F_i=F_i(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x),\ u(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1};\ C))$$

$$i=1,\cdots,n-1$$

$$y_n=u(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x);\ C)$$

由(4)可得

$$\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y_1}F_1+\cdots+\frac{\partial v}{\partial y_{n-1}}F_{n-1}\right)\Big/\frac{\partial v}{\partial y_n} \tag{7}$$

再由(2)是方程组(1)的首次积分得

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y_1}F_1+\cdots+\frac{\partial v}{\partial y_n}F_n\equiv 0$$

代入(7)即得

$$\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=F_n(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x),\ u_n(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1};\ C))$$

因此(6)为方程组(1)的解. 证毕.

【551】 设 $v_i(x,y_1,\cdots,y_n)=C_i(i=1,\cdots,k;\ 1\leqslant k\leqslant n-1)$是方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1,\cdots,y_n)\quad(i=1,\cdots,n) \tag{1}$$

在区域 $G\subset R^{n+1}$内的 k 个独立的首次积分, 则利用 k 个首次积分可以将(1)降为只含 $n-k$ 个未知函数, 由 $n-k$ 个一阶方程构成的方程组.

证

$$v_i(x,y_1,\cdots,y_n)=C_i\quad(i=1,\cdots,k) \tag{2}$$

为方程(1)的 k 个独立的首次积分, 不妨设行列式

$$\frac{D(v_1,\cdots,v_k)}{D(y_{n-(k-1)},\cdots,y_n)}\neq 0\qquad(x,y_1,\cdots,y_n)\in G$$

则由(2)可得

$$y_{n-j}=\varphi_{n-j}(x,y_1,\cdots,y_{n-k};\ C_1,\cdots,C_k)$$
$$j=0,\cdots,k-1 \tag{3}$$

将(3)代入(1)的前 $n-k$ 个方程，即可把(1)转化为求 $y_1,\cdots,y_{n-k}$的 $n-k$ 个方程

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1,\cdots,y_{n-k},\varphi_{n-k+1}(x,y_1,\cdots,y_{n-k};\ C_1,\cdots,C_k)$$
$$\cdots,\varphi_n(x,y_1,\cdots,y_{n-k};\ C_1,\cdots,C_k))$$
$$i=1,\cdots,n-k.$$

若能求出这 $n-k$ 个方程组成的方程组的解

$$y_i=\psi_i(x;\ C_1,\cdots,C_k)\quad(i=1,\cdots,n-k)$$

则如题 11 类似可证

$$\begin{cases}y_i=\psi_i(x;\ C_1,\cdots,C_k)\\ y_{n-j}=\varphi_{n-j}(x,\psi_1(x;\ C_1,\cdots,C_k),\cdots,\psi_{n-k}(x;\ C_1,\cdots,C_k))\end{cases}$$
$$i=1,\cdots,n-k,\qquad j=0,\cdots,k-1$$

就是方程组(1)的解. 证毕.

§7.2 一阶线性齐次偏微分方程

提 要

含有多个自变量、未知函数和它的某些偏导数的关系式称为偏微分方程. §7.2 及§7.3 涉及的是特殊的一阶偏微分方程.

定义 1 方程

$$A_1(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+A_n(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \tag{1}$$

其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是自变量，u 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的未知函数．$A_1,\cdots,A_n$ 是区域 $D\subset R^n$ 内的已知函数，并设 $A_1,\cdots,A_n$ 在 D 内不同时为零，则形如(1)的方程称为一阶线性齐次偏微分方程．

定义 2　设 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 在区域 $G\subset D$ 内连续可微，并且代入方程(1)之后，能使该式在 G 内成为恒等式，则称 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是(1)的一个解，G 是该解的定义域．

定理 1　$u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是(1)的解的充要条件是 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=C$ 是常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\mathrm{d}x_2}{A_2(x_1,\cdots,x_n)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(x_1,\cdots,x_n)} \tag{2}$$

的首次积分．

定义 3　常微分方程组(2)称为方程(1)的特征方程组．

定理 2　设

$$\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)=C_i \qquad (i=1,\cdots,n-1)$$

是方程(1)对应的特征方程组(2)的 $n-1$ 个独立的首次积分，$\Phi(u_1,\cdots,u_{n-1})$ 是任意的连续可微函数，则

$$u=\Phi(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)) \tag{3}$$

包括了方程(1)的所有解，称(3)为方程(1)的通解．

定义 4　对方程(1)可给出如下初始条件

$$u\Big|_{x_i=x_i^0}=f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n) \tag{4}$$

其中 i 为 $1,2,\cdots,n$ 中某一数，x_i^0 是给定的数．f 为某一给定函数，求方程(1)满足初始条件(4)的解的问题称为初值问题或柯西问题．

定理 3　假设方程(1)中 $A_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,n)$ 在域 D 内连续可微，且 $A_i\neq 0$，则初值问题

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,\cdots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0 \\ u\Big|_{x_i=x_i^0}=f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n) \end{cases}$$

存在唯一解. 其中 x_i^0 是任意给定的数，$f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$是它的变元的已知可微函数.

题　解

求下列方程的通解(习题 552～习题 570)

【552】 $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，这里设 $x^2+y^2>0$.

解 特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+y}=\frac{\mathrm{d}y}{-(x-y)}$$

它是一阶常微分方程，并且是齐次方程，容易求得它的通积分为

$$\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\arctan\frac{y}{x}}=C$$

因此原方程通解为

$$z=\Phi\left(\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\arctan\frac{y}{x}}\right)$$

这里 Φ 是任意连续可微函数.

【553】 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

由第一个等式可得方程组的一个首次积分

$$\frac{x}{y}=C_1$$

由第二个等式可得另一首次积分

$$\frac{y}{z}=C_2$$

于是 $u=\frac{x}{y}$，$u=\frac{y}{z}$ 均是原方程的解，并且这两个首次积分相互独立，因而

$$u=\Phi\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$$

为原方程的通解，其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【554】 $x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{-2y}=\frac{\mathrm{d}z}{-z}$$

由第一个等式可求得一个首次积分

$$\varphi_1=x\sqrt{y}=C_1$$

于是 $u=x\sqrt{y}$是该方程的一个解.

由

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{-z}$$

可求得另一首次积分

$$\varphi_2=xz=C_2$$

于是 $u=xz$ 也是原方程的解.

因为

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{y} & \frac{x}{2\sqrt{y}} & 0\\ z & 0 & x\end{bmatrix}$$

当 $xyz\neq 0$ 时，存在不为 0 的二阶方阵，故 φ_1 与 φ_2 是独立的，所以在不含 $xyz=0$ 的点的区域上，原方程通解为

$$u=\Phi(x\sqrt{y},xz)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【555】 $y\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{0}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

由 $\mathrm{d}y=0$，可得一首次积分

$$y=C_1$$

其次由

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

将 $y=C_1$ 代入，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{C_1}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

积分得

$$z=C_2e^{\frac{x}{C_1}}$$

再将 $y=C_1$ 代入上式，得另一首次积分

$$ze^{-\frac{x}{y}}=C_2$$

容易验证这两个首次积分相互独立，故原方程通解为

$$u=\Phi(y,ze^{-\frac{x}{y}})$$

其中 Φ 是任意二元连续可微函数.

【556】 $(z-y)\frac{\partial u}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$$

由合比定理得

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}=\frac{dx+dy+dz}{0}$$

由此可得

$$d(x+y+z)=0$$

于是得到一个首次积分

$$x+y+z=C_1$$

另外，我们有

$$\frac{2x dx}{2x(z-y)}=\frac{2y dy}{2y(x-z)}=\frac{2z dz}{2z(y-x)}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}$$

于是得到另一个首次积分

$$x^2+y^2+z^2=C_2$$

容易验证这两个首次积分是相互独立的，所以原方程通解为

$$u=\Phi(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【557】 $\dfrac{B-C}{A}yz\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{C-A}{B}zx\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{A-B}{C}xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{A dx}{(B-C)yz}=\frac{B dy}{(C-A)zx}=\frac{C dz}{(A-B)xy}$$

易求出此方程组的两个首次积分

$$\frac{A}{(B-C)}x^2-\frac{B}{C-A}y^2=C_1$$

$$\frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2=C_2$$

这两个首次积分相互独立，因此所求方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2,\ \frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2\right)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【558】 $2x\frac{\partial u}{\partial t}-\ln t\frac{\partial u}{\partial x}+(\ln t-2x)\frac{\partial u}{\partial y}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}t}{2x}=\frac{\mathrm{d}x}{-\ln t}=\frac{\mathrm{d}y}{\ln t-2x}$$

对于

$$\frac{\mathrm{d}t}{2x}=\frac{\mathrm{d}x}{-\ln t}$$

分离变量，并对两边积分得特征方程组的一个首次积分

$$t(\ln t-1)+x^2=C_1$$

再将特征方程组分子，分母分别相加，有

$$\frac{\mathrm{d}t}{2x}=\frac{\mathrm{d}x}{-\ln t}=\frac{\mathrm{d}y}{\ln t-2x}=\frac{\mathrm{d}t+\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{0}$$

从而

$$\mathrm{d}(x+t+y)=0$$

由此得另一首次积分

$$x+y+t=C_2$$

容易验证这两个首次积分相互独立，故方程的通解为

$$u=\Phi[t(\ln t-1)+x^2,\ t+x+y]$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【559】 $(4y-5x)\frac{\partial u}{\partial t}+(5t-3y)\frac{\partial u}{\partial x}+(3x-4t)\frac{\partial u}{\partial y}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}t}{4y-5x}=\frac{\mathrm{d}x}{5t-3y}=\frac{\mathrm{d}y}{3x-4t}$$

将三个分式作如下变化

$$\frac{3\mathrm{d}t}{12y-15x}=\frac{4\mathrm{d}x}{20t-12y}=\frac{5\mathrm{d}y}{15x-20t}$$

则有合比性质

$$\frac{\mathrm{d}t}{4y-5x}=\frac{\mathrm{d}x}{5t-3y}=\frac{\mathrm{d}y}{3x-4t}=\frac{3\mathrm{d}t+4\mathrm{d}x+5\mathrm{d}y}{0}$$

从而

$$\mathrm{d}(3t+4x+5y)=0$$

由此得特征方程组的一个首次积分

$$\varphi_1=3t+4x+5y=C_1$$

再将特征方程组三个分式作如下变化：

$$\frac{2t\mathrm{d}t}{2t(4y-5x)}=\frac{2x\mathrm{d}x}{2x(5t-3y)}=\frac{2y\mathrm{d}y}{2y(3x-4t)}$$

$$=\frac{2t\mathrm{d}t+2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y}{0}$$

从而

$$\mathrm{d}(t^2+x^2+y^2)=0$$

由此可得另一首次积分

$$\varphi_2=t^2+x^2+y^2=C_2$$

容易验证这两个首次积分相互独立，因此原方程的通解为

$$u=\Phi(3t+4x+5y,\ t^2+x^2+y^2)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【560】 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

将上式作如下变化:

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{y\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{z\mathrm{d}z}{z^2+z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

再由合比性质，有

$$\frac{\mathrm{d}z}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

于是

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}z}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

从而

$$\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\mathrm{d}z$$

两边积分，得

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=z+C_1$$

这样就得到特征方程组的一个首次积分

$$\varphi_1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z=C_1$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

可得另一首次积分

$$\varphi_2=\frac{x}{y}=C_2$$

容易验证着两个首次积分相互独立，故原方程通解为

$$u=\Phi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z,\ \frac{x}{y}\right)$$

其中 Φ 是任意二元连续可微函数.

【561】 $\frac{\partial u}{\partial x}+\left(1-\frac{1}{z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{y-x}\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{1-\frac{1}{z}}=\frac{\mathrm{d}z}{\frac{1}{y-x}}$$

整理为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{z\mathrm{d}y}{z-1}=\frac{(y-x)\mathrm{d}z}{1}$$

将第一个分式分子, 分母乘以 $-z$, 再与第二个分式的分子, 分母分别相加, 由等比性质, 得

$$\frac{z(\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)}{-1}=\frac{(y-x)\mathrm{d}z}{1}$$

由此可得到一个首次积分

$$(y-x)z=C_1 \tag{1}$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{1-\frac{1}{z}}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\frac{1}{z}$$

将 $(y-x)z=C_1$ 代入上式, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\frac{y-x}{C_1}$$

即有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-\frac{y-x}{C_1}\mathrm{d}x$$

由上式得

$$\frac{\mathrm{d}(y-x)}{y-x}+\frac{\mathrm{d}x}{C_1}=0$$

两边积分，有

$$\ln|y-x|+\frac{x}{C_1}=\ln|C_2|$$

即

$$(y-x)e^{\frac{x}{C_1}}=C_2$$

再将$(y-x)z=C_1$代入上式，得另一首次积分

$$(y-x)e^{\frac{x}{(y-x)z}}=C_2 \tag{2}$$

(1)、(2)这两个首次积分相互独立，因此原方程通解为

$$u=\Phi\left[(y-x)z,\ (y-x)e^{\frac{x}{(y-x)z}}\right]$$

其中 Φ 是任意二元连续可微函数.

【562】 $(mz-ny)\frac{\partial u}{\partial x}+(nx-lz)\frac{\partial u}{\partial y}+(ly-mx)\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{mz-ny}=\frac{\mathrm{d}y}{nx-lz}=\frac{\mathrm{d}z}{ly-mx}$$

由此得

$$\frac{l\mathrm{d}x}{lmz-lny}=\frac{m\mathrm{d}y}{mnx-mlz}=\frac{n\mathrm{d}z}{nly-nmx}$$

由合比性质，得

$$\mathrm{d}(lx+my+nz)=0$$

于是得到一个首次积分

$$\varphi_1=lx+my+nz=C_1$$

再由特征方程组得

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{(mz-ny)2x}=\frac{2y\mathrm{d}y}{(nx-lz)2y}=\frac{2z\mathrm{d}z}{(ly-mx)2z}$$

利用合比性质得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=0$$

由此得特征方程组第二个首次积分

$$\varphi_2=x^2+y^2+z^2=C_2$$

容易验证这两个首次积分相互独立，故原方程的通解为

$$u=\Phi(lx+my+nz,\ x^2+y^2+z^2)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【563】 $y\frac{\partial u}{\partial x}+(xy^{\frac{1}{2}}-xy^2)\frac{\partial u}{\partial y}+yz\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{xy^{\frac{1}{2}}-xy^2}=\frac{\mathrm{d}z}{yz}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{yz}$$

得特征方程组的一个首次积分

$$\varphi_1=x-\ln|z|=C_1$$

由

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{xy^{\frac{1}{2}}-xy^2}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{xy^{\frac{1}{2}}(1-y^{\frac{3}{2}})}$$

于是

$$x\mathrm{d}x=\frac{y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y}{1-y^{\frac{3}{2}}}$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{2}{3}\ln|1-y^{\frac{3}{2}}|+C_2$$

故第二个首次积分为

$$\varphi_2=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\ln|1-y^{\frac{3}{2}}|=C_2$$

容易验证 φ_1 与 φ_2 相互独立，故原方程的通解为

$$u=\Phi\left(x-\ln|z|,\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\ln|1-y^{\frac{3}{2}}|\right)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【564】 $x\frac{\partial u}{\partial x}+(xy^2\ln x-y)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{xy^2\ln x-y}=\frac{\mathrm{d}z}{1}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}z$$

得特征方程组的一个首次积分为

$$\varphi_1=\ln x-z=C_1$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{xy^2\ln x-y}$$

得

$$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x-xy^2\ln x\mathrm{d}x=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{x^2y^2}-\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=0$$

两边积分得

$$-\frac{1}{xy}-\frac{\ln^2 x}{2}=-C_2,$$

于是得到另一首次积分

$$\varphi_2=\frac{1}{2}\ln^2 x+\frac{1}{xy}=C_2$$

容易验证这两个首次积分相互独立，故原方程的通解为

$$u=\Phi\left(\ln x-z,\ \frac{1}{2}\ln^2 x+\frac{1}{xy}\right)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【565】 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial y}+\left(xz^2-\frac{1}{x}z\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{\frac{1}{z}}=\frac{\mathrm{d}z}{xz^2-\frac{1}{x}z}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}z}{xz^2-\frac{1}{x}z}$$

得

$$(x^2z^2-z)\mathrm{d}x=x\mathrm{d}z$$

即

$$\frac{x^2z^2\mathrm{d}x-(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z)}{x^2z^2}=0$$

积分得一个首次积分

$$\varphi_1=x+\frac{1}{xz}=C_1$$

将

$$\frac{1}{z}=C_1x-x^2$$

代入特征方程组的第一个等式得

$$(C_1x-x^2)\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$$

积分得

$$\frac{C_1}{2}x^2-\frac{x^3}{3}=y+C_2$$

再将 $C_1=\frac{1}{xz}+x$ 代入上式得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xz}+x\right)x^2-\frac{x^3}{3}-y=C_2$$

再化简即得另一个首次积分

$$\varphi_2=\frac{x}{2z}+\frac{x^3}{6}-y=C_2$$

容易验证这两个首次积分相互独立，故原方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{1+x^2z}{xz},\frac{x}{2z}+\frac{x^3}{6}-y\right)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【566】 $xy\frac{\partial u}{\partial x}-y\sqrt{1-y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+(z\sqrt{1-y^2}-axy)\frac{\partial u}{\partial z}=0$

解 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy}=\frac{\mathrm{d}y}{-y\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}z}{z\sqrt{1-y^2}-axy}$$

由第一个等式，可得一首次积分

$$\varphi_1=xe^{\arcsin y}=C_1$$

再由

$$\frac{z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z}{-axy^2}=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{xy^2-xy\sqrt{1-y^2}}=\frac{\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x}{xy\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{-xy\mathrm{d}y}{xy^2\sqrt{1-y^2}} = \frac{\mathrm{d}(x\sqrt{1-y^2})}{xy\sqrt{1-y^2}+xy^2} = \frac{\mathrm{d}(xy)+\mathrm{d}(x\sqrt{1-y^2})}{2xy^2}$$

于是有

$$\frac{z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z}{-axy^2} = \frac{\mathrm{d}(xy)+\mathrm{d}(x\sqrt{1-y^2})}{2xy^2}$$

因而得特征方程组的另一首次积分

$$\varphi_2 = 2yz + ax(y+\sqrt{1-y^2}) = C_2$$

容易验证这两个首次积分是相互独立的，故原方程通解为

$$u = \Phi(xe^{\arcsin y},\ 2yz + ax(\sqrt{1-y^2}+y))$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【567】 $\dfrac{x-y}{z-u}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{x-y}{z-u}\dfrac{\partial v}{\partial y} + (x-y+1)\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial u} = 0$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{x-y}{z-u}} = \frac{\mathrm{d}y}{\frac{x-y}{z-u}} = \frac{\mathrm{d}z}{x-y+1} = \frac{\mathrm{d}u}{1}$$

由第一个等式得特征方程组一首次积分

$$\varphi_1 = x - y = C_1$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{x-y}{z-u}} = \frac{\mathrm{d}z-\mathrm{d}u}{x-y}$$

得第二个首次积分

$$\varphi_2 = \ln|z-u| - x = C_2$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}z}{x-y+1} = \frac{\mathrm{d}u}{1}$$

将 $x-y=C_1$ 代入得

$$\frac{\mathrm{d}z}{C_1+1}=\frac{\mathrm{d}u}{1}$$

因而得

$$\frac{z}{C_1+1}-u=C_3$$

即得第三个首次积分

$$\varphi_3=\frac{z}{x-y+1}-u=C_3$$

容易验证 φ_1，φ_2，φ_3 是相互独立的，故原方程的通解为

$$v=\Phi\left(x-y,\ln|z-u|-x,\frac{z}{x-y+1}-u\right)$$

其中 Φ 为任意三元连续可微函数.

【568】 $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}$$

容易求出它的 $n-1$ 个独立的首次积分为

$$\frac{x_2}{x_1}=C_1,\ \frac{x_3}{x_1}=C_2,\ \cdots,\ \frac{x_n}{x_1}=C_{n-1}$$

因而偏微分方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\cdots,\frac{x_n}{x_1}\right)$$

其中 Φ 是任意 $n-1$ 元的连续可微函数.

【569】 $\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{x_1\mathrm{d}x_1}{1}=\frac{x_2\mathrm{d}x_2}{1}=\cdots=\frac{x_n\mathrm{d}x_n}{1}$$

于是

$$x_1\mathrm{d}x_1=x_i\mathrm{d}x_i\quad(i=2,3,\cdots,n)$$

两边积分得

$$x_1^2-x_i^2=C_i\quad(i=2,3,\cdots,n)$$

于是得到 $n-1$ 个互相独立的首次积分

$$\varphi_i=x_1^2-x_i^2\quad(i=2,3,\cdots,n)$$

故原方程通解为

$$u=\Phi(x_1^2-x_2^2,x_1^2-x_3^2,\cdots,x_1^2-x_n^2)$$

其中 Φ 为任意 $n-1$ 元连续可微函数.

【570】 $\Delta_1\frac{\partial u}{\partial x}+\Delta_2\frac{\partial u}{\partial y}+\Delta_3\frac{\partial u}{\partial z}=0$，其中 $\Delta_k(k=1,2,3)$ 是行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z}\end{vmatrix}$$

的第三行第 k 个元素对应的代数余子式，而 f_1,f_2,f_3 为已知可微函数.

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\Delta_1}=\frac{\mathrm{d}y}{\Delta_2}=\frac{\mathrm{d}z}{\Delta_3}$$

因为

$$\Delta_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\Delta_2\frac{\partial f_1}{\partial y}+\Delta_3\frac{\partial f_1}{\partial z}=0$$

$$\Delta_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \Delta_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \Delta_3 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

所以由合比性质，得

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f_2}{\partial z}\mathrm{d}z = 0$$

于是有

$$\mathrm{d}f_1 = 0$$

$$\mathrm{d}f_2 = 0$$

由此得两个首次积分

$$f_1(x, y, z) = C_1$$

$$f_2(x, y, z) = C_2$$

故原方程的通解为

$$u = \Phi(f_1(x, y, z),\ f_2(x, y, z))$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

求下列柯西问题的解(习题 571～习题 577)

【571】 $\begin{cases} \sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\dfrac{\partial y}{\partial z} = 0 \\ 当\ x = 1\ 时,\ u = y - z. \end{cases}$

解 原方程特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$$

易求得它的两个互相独立的首次积分为

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1, \qquad \sqrt{y} - \sqrt{z} = C_2$$

因而原方程的通解为

$$u=\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ \sqrt{y}-\sqrt{z})$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

再由初始条件确定，当 $x=1$ 时，$u=y-z$，即有

$$\Phi(1-\sqrt{y},\ \sqrt{y}-\sqrt{z})=y-z$$

令 $1-\sqrt{y}=\xi$，$\sqrt{y}-\sqrt{z}=\eta$，则可得

$$\Phi(\xi,\eta)=(1-\xi)^2-(1-\xi-\eta)^2=\eta(2-2\xi-\eta)$$

从而所求初值问题的解为

$$u=(\sqrt{y}-\sqrt{z})(2-2\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}).$$

【572】 $xy\dfrac{\partial u}{\partial z}+xz\dfrac{\partial u}{\partial y}+yz\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$，$u\Big|_{y=y_0}=\Psi(x,z)$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}z}{xy}=\frac{\mathrm{d}y}{xz}=\frac{\mathrm{d}x}{yz}$$

由本章【557】题可得特征方程组两个相互独立的首次积分为

$$x^2-y^2=C_1,\qquad y^2-z^2=C_2$$

因此原方程的通解为

$$u=\Phi(x^2-y^2,\ y^2-z^2)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

由初始条件得

$$\Phi(x^2-y_0^2,\ y_0^2-z^2)=\Psi(x,z)$$

令 $x^2-y_0^2=\xi$，$y_0^2-z^2=\eta$，则

$$x=\pm\sqrt{\xi+y_0^2},\qquad z=\pm\sqrt{y_0^2-\eta}$$

于是

$$\Phi(\xi,\eta)=\Psi(\pm\sqrt{\xi+y_0^2},\ \pm\sqrt{y_0^2-\eta})$$

因此所求初值问题的解为

$$u=\Psi(\pm\sqrt{x^2-y^2+y_0^2},\ \pm\sqrt{z^2-y^2+y_0^2}).$$

【573】 $\begin{cases}\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0\\ \text{当 } z=1 \text{ 时}, \quad u=xy\end{cases}$

这里设 $x>0$, $y>0$, $z>0$.

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z}$$

容易求得它的两个相互独立的首次积分为

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=C_1, \qquad 2\sqrt{y}-\ln z=C_2$$

因此原方程的通解为

$$u=\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ 2\sqrt{y}-\ln z)$$

其中 Φ 是任意二元连续可微函数.

由初始条件，得

$$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ 2\sqrt{y})=xy$$

令 $\xi=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, $\eta=2\sqrt{y}$, 则

$$x=(\xi+\frac{1}{2}\eta)^2, \quad y=\frac{1}{4}\eta^2$$

因此

$$\Phi(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\eta^2\left(\xi+\frac{1}{2}\eta\right)^2$$

由此得所求初值问题的解为

$$u=\frac{1}{4}(2\sqrt{y}-\ln z)^2\left[(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\frac{1}{2}(2\sqrt{y}-\ln z)\right]^2.$$

【574】 $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, $z\big|_{x=0}=1+\sqrt{y}$.

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{x^2-y^2}=\frac{dy}{2xy}$$

即

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^2-y^2}{2xy}$$

此为齐次方程，易求得它的通积分为

$$\frac{x^2+y^2}{y}=C$$

于是原方程的通解为

$$z=\Phi\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$$

其中 Φ 为任意连续可微函数.

由初始条件得

$$\Phi(y)=1+\sqrt{y}$$

因此所求初值问题的解为

$$z=1+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y}}.$$

【575】 $x(y^2+z^2)\frac{\partial u}{\partial x}+y(z^2+x^2)\frac{\partial u}{\partial y}+z(y^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0$

$u\big|_{x=1}=y^4+z^4$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{x(y^2+z^2)}=\frac{dy}{y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(y^2-x^2)}$$

由

$$xdx-ydy+zdz=0$$

得它的一个首次积分

$$x^2-y^2+z^2=C_1$$

再由

$$\frac{z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z}{yz}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

得另一个首次积分

$$\frac{yz}{x}=C_2$$

容易验证这两个首次积分是相互独立的，故原方程的通解为

$$u=\Phi(x^2-y^2+z^2,\ \frac{yz}{x})$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

由初始条件得

$$\Phi(1-y^2+z^2,\ yz)=y^4+z^4$$

令 $1-y^2+z^2=\xi$, $yz=\eta$, 则有

$$\begin{aligned}y^4+z^4&=(y^2-z^2)^2+2y^2z^2\\&=(\xi-1)^2+2\eta^2\end{aligned}$$

因此

$$\Phi(\xi,\eta)=(\xi-1)^2+2\eta^2$$

于是所求初值问题的解为

$$u=(x^2-y^2+z^2-1)^2+\frac{2y^2z^2}{x^2}.$$

【576】 $xz\dfrac{\partial u}{\partial x}+yz\dfrac{\partial u}{\partial y}-(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

$$u\Big|_{z=0}=\frac{y}{x}$$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=\frac{\mathrm{d}z}{-(x^2+y^2)}$$

由第一个等式得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

于是得到特征方程组的一个首次积分为

$$\frac{y}{x}=C_1$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}z}{-(x^2+y^2)}$$

将$\frac{y}{x}=C_1$代入，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{z}=\frac{\mathrm{d}z}{-(1+C_1^2)x}$$

于是有

$$(1+C_1^2)x^2+z^2=C_2$$

再将 $C_1=\frac{y}{x}$代入上式，得另一首次积分

$$x^2+y^2+z^2=C_2$$

这两个首次积分是相互独立的，于是原方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{y}{x},\ x^2+y^2+z^2\right)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

再由初始条件得

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\ x^2+y^2\right)=\frac{y}{x}$$

令 $\xi=\frac{y}{x}$，$\eta=x^2+y^2$，则

$$\Phi(\xi,\eta)=\xi$$

于是所求初值问题的解为

$$u=\frac{y}{x}.$$

【577】 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z}=0$，$u\big|_{x=1}=y+z^2$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}z}{z}$$

易求得两个相互独立的首次积分为

$$\frac{y}{x}=C_1,\qquad \frac{z^2}{y}=C_2$$

于是原方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z^2}{y}\right)$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

再由初始条件，得

$$\Phi\left(y,\ \frac{z^2}{y}\right)=y+z^2$$

令 $y=\xi$，$\frac{z^2}{y}=\eta$，则

$$y+z^2=\xi+\xi\eta$$

于是

$$\Phi(\xi,\eta)=\xi+\xi\eta$$

因此所求初值问题的解为

$$u=\frac{y}{x}+\frac{z^2}{x}.$$

【578】 试证具有一阶连续偏导数的 n 元函数 $u(x_1,\cdots,x_n)$是零次齐次函数的充要条件是 u 满足

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

证　先证充分性，设 $u(x_1,\cdots,x_n)$满足

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

(1)的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{x_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}$$

容易求出它的 $n-1$ 个独立的首次积分为

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1,\ \frac{x_3}{x_1} = C_2,\ \cdots,\ \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1}$$

因而偏微分方程(1)的通解为

$$u = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

其中 Φ 是任意 $n-1$ 元连续可微函数.

由通解表达式易知，偏微分方程(1)的一切解都是零次齐次函数.

再证必要性，因为若 $u = u(x_1,\cdots,x_n)$是零次齐次函数，对任意的 t

$$u(tx_1,\cdots,tx_n) = u(x_1,\cdots,x_n)$$

满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

即满足

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

§7.3　一阶拟线性偏微分方程

提　要

定义 1　$A_1(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+A_2(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+A_n(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,\cdots,x_n,u)$　　(1)

其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是自变量，u 是$x_1,\cdots,x_n$ 的未知函数. $A_1,\cdots,A_n$，R 是区域$D\subset R^{n+1}$内的已知函数. $A_1,\cdots,A_n$ 在D 内不同时为零，则形如(1)的方程称为一阶拟线性非齐次偏微分方程. 所谓“拟线性”是指方程仅对未知函数的一阶偏导数是线性的，而“非齐次”指的是含有不恒等于零的自由项 R. 以下总设 A_i $(i=1,\cdots,n)$和 R 在D 内连续可微.

方程(1)的求解可转化为求解下述一阶线性齐次偏微分方程

$$A_1(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+\cdots+A_n(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}+R(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0\qquad(2)$$

定理 1　设 $A_i(x_1,\cdots,x_n,u)(i=1,\cdots,n)$和 $R(x_1,\cdots,x_n,u)$在区域 $D\subset R^{n+1}$内连续可微，$A_1,\cdots,A_n$ 在D 内不同时为零. 若 $v=v(x_1,\cdots,x_n,u)$是(2)的一个解，且$\frac{\partial v}{\partial u}\neq0$，则 $v(x_1,\cdots,x_n,u)=0$是(1)的解. 反之，若 $v(x_1,\cdots,x_n,u)=0$ 是(1)的一个隐式解，并且$\frac{\partial v}{\partial u}\neq0$，则从中解出 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$必满足 $v(x_1,\cdots,x_n,\ u(x_1,\cdots,x_n))\equiv0$，其中 $v=v(x_1,$

$\cdots, x_n, u$)是(2)的某一个解.

定义 2　将方程(2)的特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n} = \frac{\mathrm{d}u}{R} \tag{3}$$

也称为一阶拟线性偏微分方程(1)的特征方程组，(3)在空间 R^{n+1} 的积分曲线称为(1)的特征线.

这样，求解(1)的问题转化为求解(2)的问题，可得如下求解(1)的具体步骤：先写出它的特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{A_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n} = \frac{\mathrm{d}u}{R} \tag{3}$$

再求出(3)的 n 个独立的首次积分

$$\varphi_i(x_1, \cdots, x_n, u) = C_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

就得到(2)的通解

$$U = \Phi(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \tag{4}$$

其中 Φ 是各变元的任意连续可微函数. 这样

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi_1(x_1, \cdots, x_n, u),\ \varphi_2(x_1, \cdots, x_n, u),\\ \cdots, \varphi_n(x_1, \cdots, x_n, u)) = 0\end{aligned} \tag{5}$$

就是(1)的隐函数形式的通解

定义 3　对方程(1)可给出如下的初始条件

$$u\Big|_{x_i = x_i^0} = \Psi(x_1, \cdots, x_{i-1},\ x_{i+1}, \cdots, x_n) \tag{6}$$

其中 i 为 $1, \cdots, n$ 中某一数，x_i^0 是给定的数，Ψ 是已知函数，方程(1)满足初始条件(6)的解的问题称为初值问题或柯西问题. 若能求出(1)的通解(5)，即可由初始条件(6)确定出函数 Φ，则可得出初值问题的解.

为简单起见，下面以两个自变量 x, y 的一阶拟线性方程

$$A_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+A_2(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y,u) \tag{7}$$

其中 A_1，A_2，R 在某区域$D\subset R^3$ 中连续可微，且 $A_1+A_2\neq 0$ 来说明特征线的几何意义.

(7)的解 $u=u(x,y)$在三维空间(x,y,u)中可以用一个曲面 S 表示，这个曲面称为(7)的积分曲面. 曲面 S 在(x,y,u)处的法向 $\boldsymbol{n}$ 为$(u_x,u_y,-1)$，则方程(7)表示法向 $\boldsymbol{n}$ 与方向$(A_1(x,y,u),A_2(x,y,u),R(x,y,u))$正交. $(A_1(x,y,u),A_2(x,y,u),R(x,y,u))$在区域 D 内形成一个向量场，适合这个向量场的积分曲线就是特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_1}=\frac{\mathrm{d}y}{A_2}=\frac{\mathrm{d}u}{R}$$

的解——特征线，这就是特征线的几何意义.

定理 2 $u=u(x,y)$是(7)的解的充分必要条件是经过 $u=u(x,y)$上每一点的特征线落在曲面 $u=u(x,y)$上，换句话说，(7)的积分曲面是由特征线织成的.

定义 3 设在 x,y,u 空间中有曲线C：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$u=u(t)$，寻求方程(7)过曲线 C 的积分曲面，称为柯西问题. 这里假定 $x_t^2+y_t^2\neq 0$.

过 C 上每一点作一条特征线即它满足常微分方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=A_1\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=A_2\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=R\end{cases}\qquad s=0\text{ 时，}\quad\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\u=u(t)\end{cases}$$

它的解是双参数的特征线族

$$x=x(s,t),\quad y=y(s,t),\quad u=u(s,t) \tag{8}$$

它关于 s,t 是连续可微的，若利用(8)式前两个函数能将 s,t 用 x,y 表示代入(8)式中的第三式得

$$u=u(s(x,y),\ t(x,y))$$

这说明特征线族织成(7)式满足初始条件的积分曲面.

定理 3　在求(7)过曲线 C：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$u=u(t)$的柯西问题中，若在初始曲线 C 上处处有

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1(x(t),y(t),u(t)) & A_2(x(t),y(t),u(t)) \\ x_t & y_t \end{vmatrix}$$

$$=A_1y_t-A_2x_t\neq 0$$

则在 C 的邻域内存在唯一解. 若沿曲线 C 处处有 $\Delta=0$，则或者柯西问题无解，或者 C 为特征线，柯西问题有无穷多个解.

题　解

求下列方程的通解(习题 579～习题 589)

【579】　$(1+\sqrt{z-x-y})\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}z}{2}$$

由后一等式得它的一个首次积分

$$z-2y=C_1$$

再利用合比定理，有

$$\frac{\mathrm{d}(z-x-y)}{-\sqrt{z-x-y}}=\frac{\mathrm{d}y}{1}$$

又可得到另一首次积分

$$2\sqrt{z-x-y}+y=C_2$$

这两个首次积分是相互独立的，可得原方程的隐式通解为

$$\Phi(z-2y,\ 2\sqrt{z-x-y}+y)=0$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【580】 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{x^2-y^2}$$

由第一个等式易得它的一个首次积分

$$x^2+y^2=C_1$$

再由合比性质，得

$$\frac{y dx+x dy}{y^2-x^2}=\frac{dz}{x^2-y^2}$$

于是有

$$d(xy)+dz=0$$

得另一首次积分为

$$xy+z=C_2$$

这两个首次积分相互独立，于是得到原方程的隐式通解

$$\Phi(x^2+y^2,\ xy+z)=0$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【581】 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{z}$$

易得它的一个首次积分

$$y=C_1$$

将 $y=C_1$，代入特征方程组，可得

$$z=C_2e^{\frac{x}{C_1}},$$

再将 $y=C_1$，代入上式，得另一首次积分

$$ze^{-\frac{x}{y}}=C_2$$

这两个首次积分相互独立，因此原方程的隐式通解为

$$\Phi(y,\ ze^{-\frac{x}{y}})=0$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【582】 $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}+\cos x\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos x\cos y$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{\cos y}=\frac{dy}{\cos x}=\frac{dz}{\cos x\cos y}$$

由

$$\frac{dx}{\cos y}=\frac{dz}{\cos x\cos y}$$

可得特征方程组的一个首次积分

$$\varphi_1=z-\sin x=C_1$$

由

$$\frac{dx}{\cos y}=\frac{dy}{\cos x}$$

可得另一首次积分

$$\varphi_2=\sin x-\sin y=C_2$$

这两个首次积分相互独立，故原方程的隐式通解为

$$\Phi(z-\sin x,\ \sin x-\sin y)=0$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【583】 $(z+e^x)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z+e^y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2-e^{x+y}$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{z+e^x}=\frac{dy}{z+e^y}=\frac{dz}{z^2-e^{x+y}}$$

由此得

$$\frac{-ze^{-x}dx}{-z^2e^{-x}+(-z)}=\frac{dy}{z+e^y}=\frac{dz}{z^2-e^{x+y}}$$

由合比定理得

$$-ze^{-x}dx+dy+e^{-x}dz=0$$

于是

$$d(y+ze^{-x})=0$$

得到一个首次积分

$$\varphi_1=y+ze^{-x}=C_1$$

再由

$$\frac{dx}{z+e^x}=\frac{-ze^{-y}dy}{-ze^{-y}(z+e^y)}=\frac{e^{-y}dz}{e^{-y}(z^2-e^{x+y})}$$

利用合比定理得

$$d(x+ze^{-y})=0$$

于是得另一首次积分

$$\varphi_2=x+ze^{-y}=C_2$$

这两个首次积分是相互独立的，因此可得原方程的隐式通解为

$$\Phi(y+ze^{-x},\ x+ze^{-y})=0$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【584】 $(y^2+z^2-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+2xz=0$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^2+z^2-x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{-2xy}=\frac{\mathrm{d}z}{-2xz}$$

由后一等式易得一个首次积分

$$\varphi_1=\frac{z}{y}=C_1$$

再由特征方程组得

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{2x(y^2+z^2-x^2)}=\frac{2y\mathrm{d}y}{2y(-2xy)}=\frac{2z\mathrm{d}z}{2z(-2xz)}$$

由合比性质得

$$\frac{\mathrm{d}y}{-2xy}=\frac{2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z}{2x(y^2+z^2-x^2)-4xy^2-4xz^2}$$

上式两边乘以 $-2x$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

由此可得另一个首次积分

$$\varphi_2=\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2$$

这两个首次积分相互独立，因此得原方程的通解

$$\Phi\left(\frac{z}{y},\ \frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=0$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【585】　$(y^3x-2x^4)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2y^4-x^3y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=9z(x^3-y^3)$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^3x-2x^4}=\frac{\mathrm{d}y}{2y^4-x^3y}=\frac{\mathrm{d}z}{9z(x^3-y^3)}$$

由此得

$$\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}}{(y^3-2x^3)+(2y^3-x^3)}=\frac{\frac{dz}{9z}}{x^3-y^3}$$

即

$$\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}}{3(y^3-x^3)}=\frac{\frac{dz}{-3z}}{3(y^3-x^3)}$$

因此

$$\ln|xyz^{\frac{1}{3}}|=C_1'$$

所以得特征方程组的一个首次积分

$$xyz^{\frac{1}{3}}=C_1$$

又

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^4-x^3y}{y^3x-2x^4}$$

此为齐次方程，令 $y=ux$，则

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u^4-u}{u^3-2}$$

即

$$\frac{u^3-2}{u(u^3+1)}du=\frac{dx}{x}$$

也就是

$$\left(\frac{3u^2}{u^3+1}-\frac{2}{u}\right)du=\frac{dx}{x}$$

于是有

$$\ln\left|\frac{u^3+1}{u^2x}\right|=C_2'$$

因而得另一首次积分

$$\frac{y^3+x^3}{x^2y^2}=C_2$$

容易验证这两个首次积分相互独立，故得原方程的通解

$$\Phi\left(xyz^{\frac{1}{3}},\ \frac{y^3+x^3}{x^2y^2}\right)=0$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【586】　$xz(xy+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}-yz(xy+z^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x^4$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz(xy+z^2)}=\frac{\mathrm{d}y}{-yz(xy+z^2)}=\frac{\mathrm{d}z}{x^4}$$

由第一个等式可得一首次积分

$$xy=C_1$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz(xy+z^2)}=\frac{\mathrm{d}z}{x^4}$$

将 $xy=C_1$，代入上式，得

$$x^3\mathrm{d}x=z(C_1+z^2)\mathrm{d}z$$

两边积分得

$$x^4=2C_1z^2+z^4+C_2$$

再将 $xy=C_1$，代入上式，得第二个首次积分

$$x^4-2xyz^2-z^4=C_2$$

这两个首次积分相互独立，故原方程的隐式通解为

$$\Phi(xy,\ x^4-2xyz^2-z^4)=0$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

【587】　$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}-2u=x^2$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}u}{x^2+2u}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

可得两个首次积分

$$\varphi_1=\frac{y}{x}=C_1,\qquad \varphi_2=\frac{z}{y}=C_2$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{x^2+2u}$$

得

$$x^2\mathrm{d}x+2u\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}u$$

两端同乘$\frac{1}{x^3}$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{x^2}-\frac{2u\,\mathrm{d}x}{x^3}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}\left(\frac{u}{x^2}\right)$$

由此得第三个首次积分

$$\varphi_3=\frac{u}{x^2}-\ln|x|=C_3$$

这三个首次积分相互独立，因此得原方程的隐式通解为

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{y},\ \frac{u}{x^2}-\ln|x|\right)=0$$

其中 Φ 为任意三元连续可微函数.

【588】 $(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+u+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\frac{\partial u}{\partial z}$ $=x+y+z$.

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z+u}=\frac{\mathrm{d}y}{z+u+x}=\frac{\mathrm{d}z}{u+x+y}=\frac{\mathrm{d}u}{x+y+z}$$

由合比性质得

$$\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z+\mathrm{d}u}{3(x+y+z+u)}=\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{y-x}$$

由此可得一个首次积分

$$\varphi_1=(x+y+z+u)^{\frac{1}{3}}(y-x)=C_1$$

由

$$\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z+\mathrm{d}u}{3(x+y+z+u)}=\frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}z}{z-y}$$

得另一首次积分

$$\varphi_2=(x+y+z+u)^{\frac{1}{3}}(z-y)=C_2$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z+\mathrm{d}u}{3(x+y+z+u)}=\frac{\mathrm{d}z-\mathrm{d}u}{u-z}$$

得第三个首次积分

$$\varphi_3=(x+y+z+u)^{\frac{1}{3}}(u-z)=C_3$$

这三个首次积分相互独立，由此得原方程的隐式通解

$$\Phi((x+y+z+u)^{\frac{1}{3}}(y-x),\ (x+y+z+u)^{\frac{1}{3}}(z-y)\ (x+y+z+u)^{\frac{1}{3}}(u-z))=0,$$

其中 Φ 为任意三元连续可微函数.

【589】 $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{u-x}=\frac{\mathrm{d}y}{u-y}=\frac{\mathrm{d}z}{-z}=\frac{\mathrm{d}u}{x+y}$$

利用比例性质，有

$$\frac{\mathrm{d}z}{-z}=\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{y-x}$$

即得一个首次积分

$$\frac{x-y}{z}=C_1$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}z}{-z}=\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+2\mathrm{d}u}{2u+x+y}$$

可得另一首次积分

$$(2u+x+y)z=C_2$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}z}{-z}=\frac{\mathrm{d}u-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{2(x+y-u)}$$

又得第三个首次积分

$$\frac{u-x-y}{z^2}=C_3$$

容易验证这三个首次积分相互独立，故得原方程的隐式通解

$$\Phi\left(\frac{x-y}{z},\ (2u+x+y)z,\ \frac{u-x-y}{z^2}\right)=0$$

其中 Φ 为任意三元连续可微函数.

求下列柯西问题的解(习题 590～习题 609)

【590】 $\begin{cases}(y-bz)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-az)\dfrac{\partial z}{\partial y}=bx-ay \quad (b\neq -1)\\ x=0\text{ 时},\ z=y\end{cases}$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y-bz}=\frac{\mathrm{d}y}{-(x-az)}=\frac{\mathrm{d}z}{bx-ay}$$

由此得

$$\frac{a\mathrm{d}x}{ay-abz}=\frac{b\mathrm{d}y}{-bx+abz}=\frac{\mathrm{d}z}{bx-ay}$$

由合比定理得

$$\mathrm{d}(ax+by+z)=0$$

即得到特征方程组的一个首次积分

$$ax+by+z=C_1$$

再由

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{2x(y-bz)}=\frac{2y\mathrm{d}y}{-2y(x-az)}=\frac{2z\mathrm{d}z}{2z(bx-ay)}$$

由合比定理得

$$\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)=0$$

于是得另一个首次积分为

$$x^2+y^2+z^2=C_2$$

这两个首次积分相互独立，再由初始条件 $x=0$ 时，$z=y$ 在这两个首次积分中令 $x=0$，$y=z$ 可得

$$2\left(\frac{C_1}{b+1}\right)^2=C_2$$

因此所求解为

$$x^2+y^2+z^2=2\left(\frac{ax+by+z}{b+1}\right)^2.$$

【591】 $\begin{cases} x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=1 \\ \text{当 } x+y=1 \text{ 时}, \quad u=0 \end{cases}$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{u}=\frac{du}{1}$$

易得它的两个互相独立的首次积分

$$u+\frac{1}{x}=C_1, \qquad 2y-u^2=C_2$$

由初始条件：$x+y=1$ 时 $u=0$，及这两个首次积分得

$$x=\frac{1}{C_1}, \qquad y=\frac{C_2}{2}$$

即有

$$C_1(2-C_2)=2$$

于是初始问题的解为

$$(u+\frac{1}{x})(2-2y+u^2)=2.$$

【592】 $\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z \\ z\Big|_{x=2}=y-4 \end{cases}$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y+x^2}=\frac{dz}{z}$$

易得它的一个首次积分

$$\frac{z}{x}=C_1$$

再由

$$\frac{dx}{x}=\frac{2x\,dx}{2x^2}=\frac{dy}{y+x^2}$$

利用合比定理

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy-dx^2}{y-x^2}$$

即

$$\frac{dx}{x}=\frac{d(y-x^2)}{y-x^2}$$

于是得另一个首次积分

$$\frac{y-x^2}{x}=C_2$$

易验证这两个首次积分相互独立，由这两个首次积分及初始条件 $x=2$，$z=y-4$，得

$$C_1=C_2$$

于是所求解为

$$z=y-x^2.$$

【593】 $\begin{cases}(x^2-yz)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y^2-zx)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2-xy\\ z\big|_{x=0}=2y\end{cases}$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{x^2-yz}=\frac{dy}{y^2-zx}=\frac{dz}{z^2-xy}$$

利用合比定理，得

$$\frac{dx-dy}{x^2-y^2-yz+zx}=\frac{dy-dz}{y^2-zx-z^2+xy}$$

即

$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{d(y-z)}{y-z}$$

于是得特征方程组的一个首次积分

$$\frac{x-y}{y-z}=C_1$$

再由

$$\frac{dy-dz}{y^2-zx-z^2+xy}=\frac{dz-dx}{z^2-xy-x^2+yz}$$

得另一个首次积分

$$\frac{y-z}{z-x}=C_2$$

由这两个独立的首次积分及初始条件 $x=0$，$z=2y$，得

$$C_1=1,\qquad C_2=-\frac{1}{2}$$

于是柯西问题的解为

$$z=2y-x.$$

【594】 $\begin{cases}(mz-ny)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(nx-lz)\dfrac{\partial z}{\partial y}=ly-mx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (l,m,n\text{ 是常数}) \\ \text{当 } x=a \text{ 时，} y^2+z^2=a^2\end{cases}$

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}$$

由本章习题 562，得它的两个相互独立的首次积分

$$x^2+y^2+z^2=C_2$$

$$lx+my+nz=C_1$$

由这两个首次积分及初始条件 $x=a$，$y^2+z^2=a^2$，得

$$C_2=2a^2$$

于是柯西问题的解为

$$x^2+y^2+z^2=2a^2.$$

【595】 $\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u \\ u\Big|_{x=2}=\dfrac{1}{2}(y+z) \end{cases}$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{du}{u}$$

易得它的三个相互独立的首次积分

$$\frac{y}{x}=C_1,\quad \frac{z}{x}=C_2,\quad \frac{u}{x}=C_3$$

由这三个首次积分及初始条件 $x=2$，$u=\dfrac{1}{2}(y+z)$，得

$$2C_3=C_1+C_2$$

于是柯西问题的解为

$$\frac{2u}{x}-\frac{z}{x}-\frac{y}{x}=0$$

即

$$u=\frac{1}{2}(y+z).$$

【596】 $\begin{cases} \sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=z \\ \text{当 } x=1 \text{ 时，} z=\sin 2y \end{cases}$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z}$$

它有二个独立的首次积分

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=C_1,\qquad 2\sqrt{y}-\ln|z|=C_2$$

因此原方程的通解为

$$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ 2\sqrt{y}-\ln|z|)=0$$

其中 $\Phi(\xi,\eta)$是任意连续可微函数，且设 $\Phi'_\eta\neq 0$，由隐函数定理知

$$2\sqrt{y}-\ln|z|=\omega(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

因此，得到显式通解

$$z=\pm\exp[2\sqrt{y}-\omega(\sqrt{x}-\sqrt{y})]$$

或

$$z=[\exp(2\sqrt{y})]\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \qquad (1)$$

其中 φ 是一个任意连续可微的函数.

由初始条件，可推出

$$[\exp(2\sqrt{y})]\varphi(1-\sqrt{y})=\sin 2y$$

即

$$\varphi(1-\sqrt{y})=[\exp(-2\sqrt{y})]\sin 2y$$

令 $t=1-\sqrt{y}$，则 $y=(1-t)^2$，因此得到

$$\varphi(t)=\exp[2(t-1)]\sin[2(1-t)^2]$$

代入(1)得所求柯西问题的解

$$z=\exp[2(\sqrt{x}-1)]\cdot\sin[2(1-\sqrt{x}+\sqrt{y})^2].$$

【597】 $x\dfrac{\partial z}{\partial y}-y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ 通过圆周 $z=1$，$x^2+y^2=4$ 的解.

解 原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}$$

易得它的两个相互独立的首次积分

$$z=C_1,\qquad x^2+y^2=C_2$$

这两个首次积分表示的是特征曲线族，而所给圆周包含在特征曲线族中，因此问题是不确定的．事实上，可以看出 $4z=x^2+y^2$，$z=x^2+y^2-3$，$x^2+y^2+z^2=5$ 等等均为问题的解．

方法二　将圆周表达式写成参数形式：

$$z=1,\ x=2\cos\theta,\ y=2\sin\theta$$

相应的特征方程组的初始问题为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=-y,\ \dfrac{dy}{ds}=x,\ \dfrac{dz}{ds}=0\\ s=0\text{ 时},\ x=2\cos\theta,\ y=2\sin\theta,\ z=1\end{cases}$$

又

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2\sin\theta & 2\cos\theta\\ -2\sin\theta & 2\cos\theta\end{vmatrix}=0$$

但沿圆周曲线有

$$\frac{x'(\theta)}{-2\sin\theta}=\frac{y'(\theta)}{2\cos\theta}=\frac{z'(\theta)}{0}=1$$

所以圆周曲线是特征线，柯西问题解不惟一．

【598】 $\begin{cases}\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{z}\\ \text{当 } y=0\text{ 时},\ z=\ln x\end{cases}$

解　原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

由习题 32 知原方程的通解为

$$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ \sqrt{y}-\sqrt{z})=0$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数．对 $\Phi(\xi,\eta)=0$，设 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta}\neq0$，

则由隐函数定理可得

$$\sqrt{y}-\sqrt{z}=\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

其中 φ 为任意连续可微函数. 由此可得原方程显式通解

$$z=[\sqrt{y}-\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y})]^2$$

再利用初始条件来确定 φ，因为当 $y=0$ 时，$z=\ln x$，我们有

$$[\varphi(\sqrt{x})]^2=\ln x$$

则

$$\varphi(\sqrt{x})=-\sqrt{\ln x}$$

(因为$\sqrt{y}-\sqrt{z}=\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y})$知 $y=0$ 时 $\varphi(\sqrt{x})$为负).

因而

$$\varphi(\xi)=-\sqrt{\ln\xi^2}$$

因此得到所求初值问题的解为

$$z=[\sqrt{y}+\sqrt{\ln(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}]^2.$$

【599】 $\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z \\ z\Big|_{x=1}=y \end{cases}$

解 将初始曲线表达式写成参数形式:

$$x=1,\quad y=t,\quad z=t$$

相应的特征方程组的初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds}=x,\ \dfrac{dy}{ds}=y,\ \dfrac{dz}{ds}=2z \\ s=0\text{ 时},\ x=1,\ y=t,\ z=t \end{cases}$$

又因为

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

故有惟一的积分曲面含有已知曲线.

特征方程组的通解为

$$x = C_1 e^s, \quad y = C_2 e^s, \quad z = C_3 e^{2s}$$

由初始条件可得

$$C_1 = 1, \quad C_2 = t, \quad C_3 = t$$

因而

$$x = e^s, \quad y = te^s, \quad z = te^{2s}$$

消去参数 t, s, 可得柯西问题的解为

$$z = xy.$$

【600】 $uu_x + u_y = 1$ 分别过空间曲线

1) l_1: $x = t$, $y = t$, $u = 0$;

2) l_2: $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = t$, $u = t$;

3) l_3: $x = t^2$, $y = 2t$, $u = t$

的积分曲面.

解 与原方程对应的特征方程组为

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 1$$

1) 由曲线 l_1 的参数方程知

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以存在惟一的积分曲面含有曲线 l_1.

可求出特征方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 + C_3 s + \dfrac{s^2}{2} \\ y = C_2 + s \\ u = C_3 + s \end{cases}$$

再由初始条件

$$x\Big|_{s=0}=t=C_1$$

$$y\Big|_{s=0}=t=C_2$$

$$u\Big|_{s=0}=0=C_3$$

可得

$$x=t+\frac{s^2}{2},\quad y=t+s,\quad u=s$$

消去参数 t，s 可得所给柯西问题的解为

$$x-y=\frac{u^2}{2}-u$$

2）对于 l_2 的情形，由于

$$\Delta=\begin{vmatrix} t & 1 \\ t & 1 \end{vmatrix}=0$$

但沿曲线 l_2 有

$$\frac{x'(t)}{t}=\frac{y'(t)}{1}=\frac{u'(t)}{1}=1$$

所以 l_2 是特征线，柯西问题解不惟一.

3）对于 l_3 的情形

$$\Delta=\begin{vmatrix} t & 1 \\ 2t & 2 \end{vmatrix}=0$$

但沿曲线 l_3 有

$$2=\frac{x'(t)}{t}=\frac{y'(t)}{1}\neq\frac{u'(t)}{1}=1$$

故柯西问题无解.

【601】 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$，过曲线 l：$x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=\cos t$.

解　由 l 的参数方程可得

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sin t & -\cos t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}=0$$

沿曲线 l 有

$$-1=\frac{x'(t)}{\sin t}=\frac{y'(t)}{-\cos t}\neq\frac{z'(t)}{0}$$

因此 l 不是特征线，柯西问题无解.

【602】 $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 过曲线 l：$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$.

解　由已知曲线的参数方程得

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2t\end{vmatrix}=2t+1\neq 0\quad(\text{设 } t\neq -\frac{1}{2})$$

所以方程通过曲线 l 存在惟一曲面.

原方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{ds}=1,\quad \frac{dy}{ds}=-1,\quad \frac{dz}{ds}=1$$

满足初始条件：$s=0$，$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 的解为

$$x=s+t,\quad y=t^2-s,\quad z=t^3+s$$

消去 s,t 得所求柯西问题的隐式解为

$$(x+y)^3=(y+z)(x+2y+z).$$

【603】 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$，$l$：$y=1$，$z=x$

解　由 l 的参数方程

$$x=t,\quad y=1,\quad z=t$$

得

$$\Delta=\begin{vmatrix}t & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

所以柯西问题的解存在且惟一.

原方程的特征方程组

$$\frac{dx}{ds}=x,\qquad \frac{dy}{ds}=y,\qquad \frac{dz}{ds}=0$$

满足初始条件：$x(0)=t$，$y(0)=1$，$z(0)=t$ 的解为

$$\begin{cases} x=te^s \\ y=e^s \\ z=t \end{cases}$$

消去 s,t，得所求柯西问题的解为

$$z=\frac{x}{y}.$$

【604】 $z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}-y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$，$l$：$x=1$，$z=\sqrt{y}$

解 l 的参数方程

$$x=1,\quad y=t^2,\quad z=t$$

由此得

$$\Delta=\begin{vmatrix} t(1+t) & -t^2(t^2+t) \\ 0 & 2t \end{vmatrix}\neq 0$$

所以柯西问题存在惟一解.

原方程的特征方程组

$$\frac{dx}{ds}=z(x+z),\quad \frac{dy}{ds}=-y(y+z),\quad \frac{dz}{ds}=0$$

满足初始条件：$x(0)=1$，$y(0)=t^2$，$z(0)=t$ 的解为

$$\begin{cases} x=(t+1)e^{ts}-t \\ y=\dfrac{t^2}{(t+1)e^{ts}-t} \\ z=t \end{cases}$$

消去参数 t,s 得柯西问题的解为

$$z=\sqrt{xy}.$$

【605】 $\tan x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$，$l$：$y=x$，$z=x^3$.

解　曲线 l 的参数方程为

$$x=t,\quad y=t,\quad z=t^3$$

于是

$$\Delta=\begin{vmatrix}\tan t & t\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\tan t-t\neq 0\quad(t\neq\tan t)$$

所以柯西问题存在惟一解.

原方程的特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\tan x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=y,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=z$$

满足初始条件 $x(0)=t$，$y(0)=t$，$z(0)=t^3$ 的解为

$$\begin{cases}x=\arcsin(e^s\sin t)\\ y=te^s\\ z=t^3e^s\end{cases}$$

消去 s,t 得柯西问题的隐式解为

$$\sin x=\sqrt{\frac{y^3}{z}}\cdot\sin\sqrt{\frac{z}{y}}.$$

【606】 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}+x=0$，$l$：$y=x^2$，$z=2x$.

解　l 的参数方程为

$$x=t,\quad y=t^2,\quad z=2t$$

因而

$$\Delta=\begin{vmatrix}2t & 4t^2-t^2\\ 1 & 2t\end{vmatrix}\neq 0$$

所以柯西问题存在惟一解.

原方程的特征方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=z\\ \dfrac{dy}{ds}=z^2-x^2\\ \dfrac{dz}{ds}=-x\end{cases} \tag{1}$$

由

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-x}$$

得

$$z^2+x^2=C_1^2 \tag{2}$$

由

$$\frac{z\,dx+x\,dz}{z^2-x^2}=\frac{dy}{z^2-x^2}$$

得

$$xz-y=C_2 \tag{3}$$

将(2)代入(1)得

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1^2-x^2}}=\pm ds$$

两边积分得

$$\arcsin\frac{x}{C_1}=C_3\pm s$$

再代入(1)中第三式及第二式，即得特征方程组的通解

$$x = C_1\sin(\pm s + C_3)$$

$$y = \frac{1}{2}C_1^2\sin2(\pm s + C_3) - C_2$$

$$z = C_1\cos(\pm s + C_3)$$

由初始条件当 $s=0$ 时，$x=t$，$y=t^2$，$z=2t$，所以

$$C_1\sin C_3 = t,\ \frac{1}{2}C_1^2\sin(2C_3) - C_2 = t^2,\ C_1\cos C_3 = 2t$$

由此可求得

$$C_1^2 = 5t^2,\quad C_2 = t^2,\quad C_3 = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

再将 C_1，C_2 代入(2)，(3)，得

$$z^2 + x^2 = 5t^2$$

$$xz - y = t^2$$

上两式消去 t，即得所求柯西问题的解

$$z^2 + x^2 - 5(xz - y) = 0.$$

【607】 求方程 $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$，过 l：$x=0$，$z=y^2$ 的积分曲面.

解　将曲线写为参数形式：$x=0$，$y=t$，$z=t^2$. 由曲线 l 的参数方程可得

$$\Delta = \begin{vmatrix} -t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -t \neq 0 \quad (\text{设 } t\neq 0)$$

所以原方程有惟一含有曲线 l 的积分曲面.

原方程的特征方程组

$$\frac{dx}{ds} = -y,\quad \frac{dy}{ds} = x,\quad \frac{dz}{ds} = 0$$

满足初始条件 $s=0$ 时 $x=0$，$y=t$，$z=t^2$ 的解为

$$x=-t\sin s,\quad y=t\cos s,\quad z=t^2$$

上式消去 s,t 得原方程过 l 的积分曲面

$$z=x^2+y^2.$$

【608】 $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$，$l$：$x-y=0$，$x-yz=1$

解 l 的参数方程为

$$x=t,\quad y=t,\quad z=\frac{t-1}{t}$$

于是

$$\Delta=\begin{vmatrix} t^2 & t-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

所以柯西问题存在惟一解.

原方程的特征方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=y^2\\[2mm] \dfrac{dy}{ds}=yz\\[2mm] \dfrac{dz}{ds}=-z^2\end{cases}$$

易求得它的通解为

$$\begin{cases}z=\dfrac{1}{s+C_1}\\[2mm] y=C_2(s+C_1)\\[2mm] x=C_2^2\dfrac{(s+C_1)^3}{3}+C_3\end{cases}\tag{1}$$

将初始条件 $s=0$，$x=t$，$y=t$，$z=\dfrac{t-1}{t}$代入(1)得

$$C_1=\frac{t}{t-1},\quad C_2=t-1,\quad C_3=t-\frac{t^3}{3(t-1)}$$

因此得

$$x=\frac{[s(t-1)+t]^3}{3(t-1)}+t-\frac{t^3}{3(t-1)}$$

$$y=s(t-1)+t,\qquad z=\frac{t-1}{s(t-1)+t}$$

消去参数 s,t 即得柯西问题的解.

$$3xyz=y^3-y^3z^3-1.$$

【609】 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$，$l$：$x=t$，$y=3t$，$z=3t$.

解 由 l 的参数方程得

$$\Delta=\begin{vmatrix}t^2 & -3t^2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\neq 0$$

所以柯西问题存在惟一解.

原方程的特征方程组

$$\frac{dx}{ds}=x^2,\quad \frac{dy}{ds}=-xy,\quad \frac{dz}{ds}=-y^2$$

满足初始条件

$$x\Big|_{s=0}=t$$

$$y\Big|_{s=0}=3t$$

$$z\Big|_{s=0}=3t$$

的解为

$$x=\frac{t}{1-st},\quad y=3t(1-st),\quad z=3t(1-st)^3$$

消去参数 s,t 即得柯西问题的解为

$$z=\frac{y^2}{3x}.$$

参考文献

[1] 东北师范大学微分方程教研室，常微分方程，高等教育出版社，2001.

[2] 丁同仁、李承治，常微分方程教程，高等教育出版社，2002.

[3] 王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松，常微分方程，高等教育出版社，2001.

[4] 叶彦谦，常微分方程讲义，人民教育出版社，1979.

[5] 蔡燧林，常微分方程，浙江大学出版社，2001.

[6] 丁同仁，常微分方程基础，上海科学技术出版社，1981.

[7] 田中静男，微分方程习题详解(杜长春、罗固事译)，重庆出版社，1988.

[8] 周尚仁、权宏顺，常微分方程习题集，人民教育出版社，1981.

[9] 近藤次郎、十柳芳雄、高雄磐郎、渡边正，微分方程·付里叶分析(傅文章译)，辽宁人民出版社，1983.

[10] E·卡姆克，常微分方程手册(张鸿林译)，科学出版社，1977.

[11] 钱详征，微分方程解题方法，湖南科学技术出版社，1985.

[12] 阮炯，差分方程和常微分方程，复旦大学出版社，2002.

[13] 尤秉礼，常微分方程补充教程，人民教育出版社，1983.

[14] 复旦大学数学系，常微分方程，上海科学技术出版社，1978.

[15] 郗长清、焦宝聪、焦炳照，常微分方程，北京师范学院出版社，1993.

[16] 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜，微分方程定性理论，科学出版社，1997.

[17] 叶彦谦，极限环论，上海科学技术出版社，1984.

[18] 任永泰、史希福，常微分方程，辽宁人民出版社，1984.

[19] 贺建勋、王志成，常微分方程，湖南科学技术出版社，1979.

[20] R.布朗森，全美精典·微分方程，科学出版社，2002.

[21] 王柔怀、伍卓群，常微分方程讲义，人民教育出版社，1978.

[22] 庄万、黄启宇、丛树凡等，常微分方程，山东科学技术出版社，1994.

[23] 陈恕行，偏微分方程概论，人民教育出版社，1981.

[24] И. Г. 彼得罗夫斯基，常微分方程讲义(黄克欧译)，高等教育出版社，1957.

[25] F.约翰，偏微分方程(朱汝金译)，科学出版社，1986.

[General Information]
书名=常微分方程习题解
作者=庄万主编
页数=693
SS号=11218101
出版日期=2003年09月第1版